Part I

MATEMATİK-2 (DERS)

1 İNTEGRAL

1.1 Fonksiyonun İlkeli

Dünyadaki bazı olayların matematiksel modelleri genellikle bilinmeyen fonksiyonların türevlerini içeren denklemlerdir. Örneğin, doğum ve ölüm oranları sabit iken nüfus ile nüfustaki değişim oranı doğru orantılıdır. Yani P nüfus, $\frac{dP}{dt}$ de nüfusdaki değişim oranı ise $\frac{dP}{dt} = kP$ (k sabit) olur. Yine Newton'un soğuma yasasına göre T sıcaklığına sahip bir cismin sıcaklık değişim oranı, cismi çevreleyen ortamın sıcaklığı ve T arasındaki fark ile doğru orantılıdır. Yani $\frac{dT}{dt} = k(A - T)$ dir. Burada k sabit A ise cismi çevreleyen ortamın sıcaklığıdır ki genelde sabit kabul edilir. Bu tip matematiksel modellere diferensiyel denklemler adı verilir. En basit tipteki diferensiyel denklem, f bilinen fonksiyon y ise x'e bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $\frac{dy}{dx} = f(x)$ biçimindedir. Böyle bir denklemden y yi bulma işlemi aslında türevi belli olan fonksiyonu bulma işlemidir. Bir fonksiyonu türevinden bulma işlemi diferensiyellemenin tersidir ve ters diferensiyelleme olarak adlandırılır. Türevi $f(x)$ olan fonksiyon $F(x)$ ise yani $F'(x) = f(x)$ ise F ye f nin ters türevi veya ilkeli denir. Türev ile ters türev arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa pek çok özel fonksiyonun ters türevini bulabiliriz. Örneğin

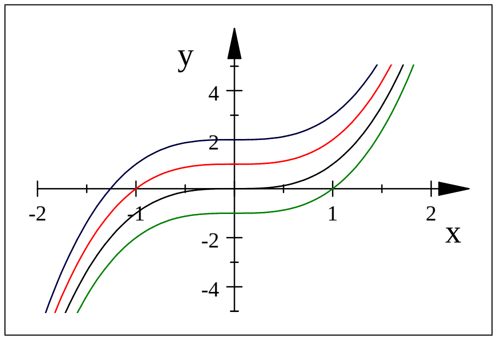
Fonksiyon	İlkel
$f(x)$	$F(x)$
1	x
$2x$	x^2
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Bir fonksiyon eğer varsa sadece bir tek türeve sahip olduğu halde, eğer varsa pek çok ilkele sahiptir. Örneğin $f(x) = 3x^2$ fonksiyonu için $G(x) = x^3$, $H(x) = x^3 + 1$, $K(x) = x^3 - 7$, $\cdots$, birer ilkeldirler. Aslında C sabit olmak üzere $F(x) = x^3 + C$ bu fonksiyonun ilkelidir.

Teorem 1 *Eğer I açık aralığındaki her bir x noktasında $F'(x) = f(x)$ ise f nin I üzerindeki her bir G ilkeli $G(x) = F(x) + C$ (C sabit) biçimindedir.*

Bu teoremden de anlaşılacağı gibi bir fonksiyonun iki ilkeli arasındaki fark sabittir. Böylece, bir fonksiyonun ilkellerinin grafikleri birbirlerinin düşey ötelemeleridir.

Örnek 2 *$f(x) = 3x^2$ fonksinunun ilkelleri $F(x) = x^3 + C$ biçimindedir ve* *bunların grafikleri aşağıdaki gibidir.*



f fonksiyonunun bir özel ters türevi, C ye belirli bir değer atanarak bulunabilir. Örneğin $f(x) = 3x^2$ nin $F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulmak istersek $F(x) = x^3 + C$ en genel tes türevinde $F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan C değerini buluruz ki bu $C = -2$ dir. Böylece istene iskel $F(x) = x^3 - 2$ olur.

Bir fonksiyonun türevi için çeşitli gösterimler kullanılmıştır. Bunlardan biri de diferensiyel operatör denilen D operatörüdür. Yani $F'(x) = f(x)$ eşitliği $DF(x) = f(x)$ biçimindede gösterilebilir. Buna göre f fonksiyonunun en genel ters türevi için $D^{-1}f(x) = F(x) + C$ gösterimini kullanabiliriz. D^{-1} e ters diferensiyel operatör denir ve D lineer olduğundan D^{-1} de lineerdir. Yani f ve g fonksiyonlarının ters türevleri F ve G ise a ve b sabit olmak üzere $af + bg$ nin en genel ters türevi $aF + bG + C$ biçimindedir.

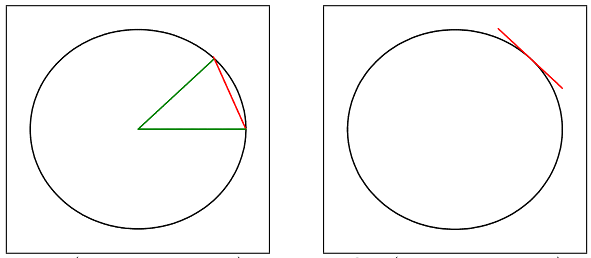
Örnek 3 $f(x) = 4x^3 + \frac{1}{x} + 3\cos x$ *fonksiyonunun en genel ters türevi yukarıdaki düşünce ile bulunabilir.*

İleri kesimlerde integral ile ters türev arasında bir ilişki kuracağız ve integral hesaplamalarında ters türevden sıkça yararlanacağız.

1.2 Temel Alan Hesaplamaları

Kenarları doğrulardan oluşan bölgelerin alanları, dikdörtgenler ve üçgenler kullanılarak hesaplanabilir. Ancak kenarları eğrilerden oluşan bir bölgenin alanını hesaplamak bu kadar kolay değildir. Örneğin r yarıçaplı bir S dairesinin alanı aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır. Dairenin içine köşeleri çember üzerinde bulunan bir n kenarlı düzgün çokgen ile, kenarları çembere teğer olan n kenarlı başka bir düzgün çokgen çizilmiş ve dairenin alanının bu çokgenlerin alanları arasında bir sayı olduğu söylenmiştir. Çokgenlerin kenar sayıları artırıldığında dairenin alanına yaklaşılacağı ifede edilmiştir. İçteki çokgene P_n ve dıştaki çokgene Q_n

diyelim.



P_n (tamamlayınız) $\quad$ Q_n (tamamlayınız)

Çokgenlerin alanları sırası ile $A(P_n)$ ve $A(Q_n)$ ise dairenin alanı için

$$A(P_n) < A(S) < A(Q_n)$$

yazılır. Böylce Sıkıştırma teoreminden

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} A(P_n) = \lim_{n\to\infty} A(Q_n)$$

olur. Burada $\alpha_n = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ olup

$$\begin{aligned} A(P_n) &= nr\cos(\frac{\alpha_n}{2})r\sin(\frac{\alpha_n}{2}) \\ &= \frac{nr^2}{2}\sin(\alpha_n) \\ &= \frac{nr^2}{2}\sin(\frac{2\pi}{n}) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A(P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2}\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}2\pi \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $A(Q_n) = nr^2\tan(\frac{\pi}{n})$ olup $\lim_{n\to\infty} A(Q_n) = \pi r^2$ bulunur. O zaman $A(S) = \pi r^2$ dir.

Burada olduğu gibi herhangi bir kapalı C eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını çokgenler yardımıyla bulabiliriz. Bu metodu kullanırken bir çok sayının toplamına ihtiyaç duyarız. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayılarının toplamı kısaca $\sum_{k=1}^{n} a_k$ biçiminde gösterilir. Yani

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

dır. İlk n pozitif tam sayının k yıncı kuvvetlerinin toplamı alan hesaplamalarında sıklıkla karşımıza çıkar.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

ifadesi $k = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k = 2$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$k = 3$ için

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

olur. Genel halde $f(n)$ derecesi k dan küçük bir polinom olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + f(n)$$

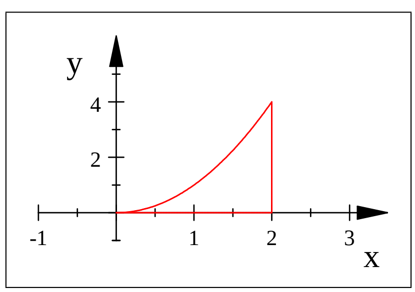
biçiminde yazılabilir.

Örnek 4 *Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.*

1. $\sum_{i=1}^{10}(i^2 + 2i)$

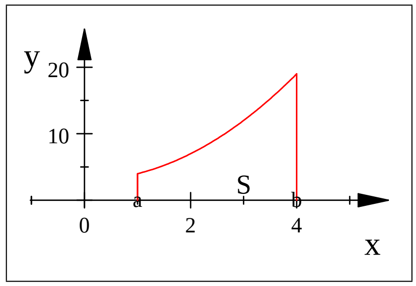
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

Örnek 5 *Dairenin alanını hesaplamada olduğu gibi çokgenler metodunu kullanarak şekildeki bölgenin alanı hesaplanabili mi? Bunun için kullanılacak çokgenler nasıl olmalıdır?*



1.3 Grafiklerin Altındaki Alan

f, $[a, b]$ kapalı aralında tanımlı sürekli ve pozitif bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını çokgenler metodu ile bulmaya çalışalım. Burada kullanacağımız çokgenler, tabanı x-ekseni üzerinde bulunan dikdörtgenlerin birleşimi olacaktır.



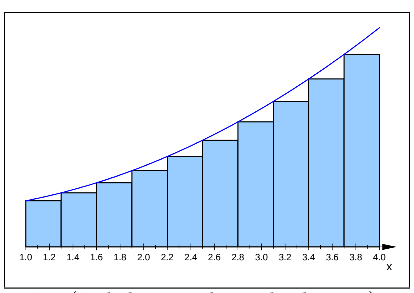
$[a,b]$ aralığını aşağıdaki şekide n eşit parçaya bölelim. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların uzunlukları eşittir ve her birinin uzunluğu $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ birimdir. Şimdi f nin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında minimum değere ulaştığı nokta x_i^* olsun. O zaman, tabanı Δx ve yüksekliği $f(x_i^*)$ olan dikdörtgenler ve bunların birleşimleri S bölgesi içindedir. Bu dikdörtgenlerin birleşimine P_n diyeceğiz. Bu durumda

$$A(P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

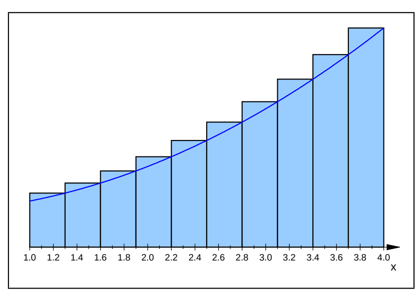
dir. Şimdi de f nin $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında maksimum değere ulaştığı nokta $x_i^{\#}$ olsun. O zaman, tabanı Δx ve yüksekliği $f(x_i^{\#})$ olan dikdörtgenler ve bunların birleşimleri S bölgesi içindedir. Bu dikdörtgenlerin birleşimine Q_n diyeceğiz. Bu durumda

$$A(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

olur.



P_n (Dikdörtgenlerin birleşimi)



Q_n (Dikdörtgenlerin birleşimi)

Sonuçta

$$A(P_n) \le A(S) \le A(Q_n)$$

veya buna denk olan

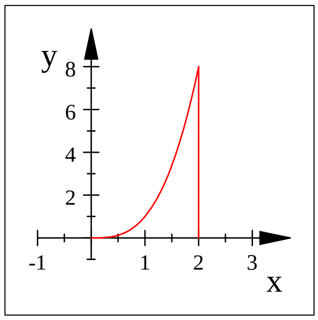
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \le A(S) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

eşitsizliği sağlanır. n yi ne kadar büyük seçersek Δx o kadar küçülür ve böylece P_n ve Q_n nin alanları birbirine yaklaşır. Aslında f nin sürekli olması halinde

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

dir ki bu ileride teorem olarak ifade edilecektir.

Örnek 6 *Şekilde $f(x) = x^3$ eğrisinin $[0,2]$ aralığındaki parçası verilmiştir. Bölgenin alanını (çokgenler metodunu kullanarak) hesaplayınız.*



$[0,2]$ yi n tane aralığa bölelim. Her bir alt aralığın boyu $\Delta x = \frac{2}{n}$ olur. Ayrıca $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{n}$, $x_2 = \frac{4}{n}, \cdots$, $x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n}$, $x_n = 2$ olur. f fonksiyonu artan olduğundan $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığındaki maksimum değerini aralığın sağ uç noktası olan x_i noktasında, minimum değerini ise sol uç nokta olan x_{i-1} noktasında alır. Böylece

$$\begin{aligned}
A(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{2(i-1)}{n})\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^3 \frac{2}{n} \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \\
&= \frac{16}{n^4}\frac{(n-1)^2 n^2}{4} = 4\left(\frac{n-1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

olur. Yine

$$\begin{aligned}
A(Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i}{n})\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^3 \frac{2}{n} \\
&= \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{16}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 4\left(\frac{n+1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = 4 = \lim_{n\to\infty} A(Q_n)$$

olduğundan istenen alan 4 birim karedir.

Örnek 7 *$x = 1$ den $x = 5$ e kadar $f(x) = 100 - x^2$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*

1.4 Riemann Toplamı ve Belirli İntegral

Önceki kesimde $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif f fonksiyonunun grafiği altında kalan alanın

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \le A(S) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\#})\Delta x$$

eşitsizliğini sağladığını belirttik. Bu eşitsizliğin sağ ve sol tarafındaki toplamlar $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ herhangi bir nokta olmak üzere $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x$ biçimindedir. Bu şekildeki toplamlar belirli integral tanımına taban oluşturur.

Şimdi $[a, b]$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunu (sürekli ve pozitif olması gerekmez) göz önüne alalım. $[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ özelliğini sağlayan noktalar yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. (aralıkların boyları eşit olmayabilir) $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir. $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarının boyları olan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sayılarının en büyüğüne P parçalanmasının normu veya maksimal çapı denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Yani $\|P\| = maks\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ dir. Her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığından seçilen keyfi x_i' noktalarının oluşturduğu $S = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ kümesine P parçalanmasının bir seçimi denir. $[a, b]$ aralığının P parçalanması ve S seçimi tarından elde edilen

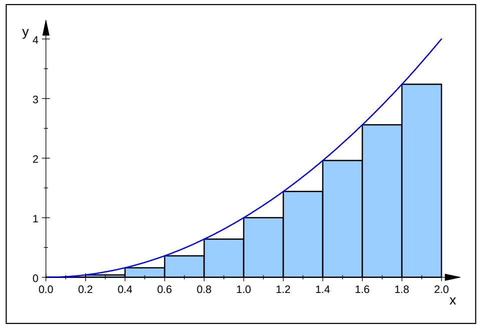
$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

toplamına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında P ve S tarafından elde edilen Riemann toplamı denir (Georg Freidrich Bernhard Riemann). P ve S ye bağlı olarak bir çok Riemann toplamı bulunabilir.

Örnek 8 *$[0, 2]$ aralığında tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Aralığı 10 eşit parçaya bölerek bir P parçalanması oluşturalım. Bu durumda her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{1}{5}$ olur. Yine $P = \{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \cdots, \frac{9}{5}, 2\}$ olacaktır. Şimdi P nin farklı üç seçimi için Riemann toplamlarını bulacağız.*

1. *x_i' noktalarını her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının sol uç noktası olarak seçelim.*

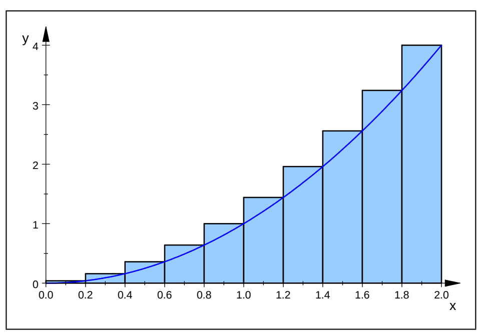
Yani $x_i' = x_{i-1} = \frac{i-1}{5}$ *olsun. Bu durumda Riemann toplamı*



$$\begin{aligned} R_{sol} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i-1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{9} i^2 = \frac{1}{125}\frac{9.10.19}{6} = 2,28 \end{aligned}$$

olur.

2. x_i' *noktalarını her bir* $[x_{i-1}, x_i]$ *aralığının sağ uç noktası olarak seçelim. Yani* $x_i' = x_i = \frac{i}{5}$ *olsun. Bu durumda Riemann toplamı*

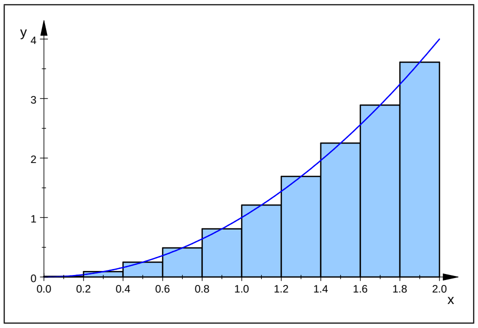


$$\begin{aligned} R_{sağ} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{5}\right)^2 \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{1}{125}\frac{10.11.21}{6} = 3,08 \end{aligned}$$

olur.

3. *Şimdi de* x_i' *noktalarını her bir* $[x_{i-1}, x_i]$ *aralığının orta noktası olarak seçelim. Yani* $x_i' = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{1}{10}(2i-1)$ *olsun. Bu durumda Riemann*

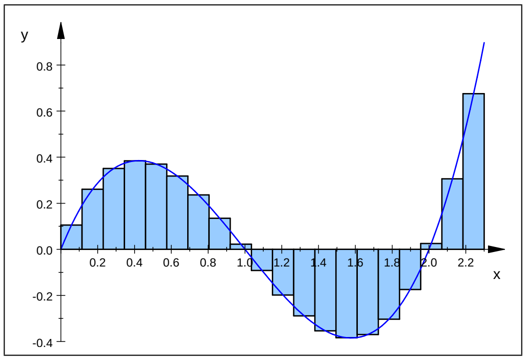
toplamı



$$R_{orta} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{2i-1}{10}\right)^2 \frac{1}{5} = 2.66$$

olur.

Uyarı 9 *Riemann toplamı için, her bir $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında genişliği Δx_i ve yüksekliği $f(x_i')$ olan dikdörtgenler oluşturulmaktadır. Eğer $f(x_i') > 0$ ise dikdörtgenler x-ekseninin üzerinde, $f(x_i') < 0$ ise dikdörtgenler x-ekseninin altındadır. Bu durumda Riemann toplamı, x-ekseninin üzerinde bulunan dikdörtgenlerin alanları toplamı ile x-ekseninin altında bulunan dikdörtgenlerin alanları toplamının farkıdır.*



$R = A_1 + A_3 - A_2$

Tanım 10 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i \tag{1}$$

limti varsa bu limite f nin a dan b ye kadar belirli integrali denir. Bu durumda f ye $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir denir.

Burada $\|P\| \to 0$ ifadesi alt aralıkların sayısının $(n \to \infty)$ sonsuza gittiğini ifede etmektedir. Ancak $n \to \infty$ olması $\|P\| \to 0$ olduğu anlamına gelmez.

Bununla birlikte parçalanmalar düzgün yapılırsa $n \to \infty$ ile $\|P\| \to 0$ ifedeleri birbirine denktir ki bu durumda (1) ifadesi yerine

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

yazılabilir.

Alan hesaplamalarında olduğu gibi (hareket eden bir cismin gittiği yol, eğri uzunluğu hacim,...) matematik ve uygulamalarında (1) tipindeki limitlerle sık karşılaşırız. Bu nedenle bu tür limitler için özel bir gösterim kullanılır. Bu limit

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir ve "a dan b ye kadar $f(x)dx$ integrali" şeklinde ifade edilir. Burada $\int$ simgesine intagral işareti (Toplam anlamına gelen "sum" kelimesinin baş harfini temsil eder ve ilk olarak Leibniz kullanmıştır), a ve b ye sırası ile integralin alt ve üst sınırları, $f(x)$ e integrant, x e ise integralin değişkeni denir. dx ise değişkenin ne olduğunu belirtmek için kullanılır. Belirli integral değişkenden bağımsızdır. Yani f, $[a,b]$ de integrallenebilir ise

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

dur.

f nin sürekli olması halinde (1) deki limitin her zaman var olduğu ve x_i' nasıl seçilirse seçilsin her zaman aynı değeri verdiği ispatlanabilir. Hatta f, sonlu sayıda kaldırılabilir veya sıçrama süreksizliğine sahip bir fonksiyon olsa bile bu limit mevcuttur. Bu durumda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 11 *f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f sürekli veya sonlu sayıda kaldırılabilir veya sıçrama süreksizliğine sahip bir fonksiyon ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali mevcuttur ve dolayısıyla f, $[a,b]$ de integrallenebilirdir.*

Örnek 12 *Riemann toplamlarını kulllanarak $\int_0^b x^2dx$ integralini hesaplayınız. $[0,b]$ aralığını eşit uzunlukta n parçaya bölelim. Bu durumda alt aralıkların boyları $\Delta x_i = \frac{b}{n}$ olup $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{b}{n}$, $x_2 = \frac{2b}{n}, \cdots, x_i = \frac{ib}{n}, \cdots, x_n = b$ olur. $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarından x_i' olarak aralıkarın sağ uç noktaları olan $x_i = \frac{ib}{n}$ noktalarını seçelim. Böylece*

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 13 *$f(x) = x^3 - 6x$ fonksiyonunu ve $[0, 3]$ aralığını göz önüne alalım.*

a) *Bu aralığı $n = 6$ olacak şekilde düzgün parçalanmaya ayırıp, her bir alt aralığın sağ uç noktasını seçerek Riemann toplamını bulunuz.,*

b) *$\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 14 *Aşağıdaki integralleri alan gibi yorumlayarak hesaplayınız.*

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

b) $\int_0^3 (x - 1)dx$

1.5 Belirli İntegralin Özellikleri

$\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinin tanımında açıkça belirtlmese de $a < b$ olduğu varsayılmıştır. Ancak $a > b$ de olsa Riemann toplamının limiti olarak yapılan tanım anlamlıdır. Eğer a ile b nin yerlerini değiştirirsek alt aralıkların boyları $\frac{b-a}{n}$ yerine $\frac{a-b}{n}$ olur. Bu yüzden

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

dir. $a = b$ ise $\Delta x = 0$ olacağından

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

olur. Benzer düşüncelerle belirli integralin aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve k bir sabit olsun. O zaman

1. Sabitle çarpım:
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. Toplam-Fark:
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Toplanabilirlik:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Maksimum-Minimum: her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ise

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5. Baskınlık: her $x \in [a, b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

dir. Özel olarak $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

dır.

6. $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

(Bu son eşitsizliğin ispatı Toplam-Fark ve Baskınlık özellikleri kullanılarak yapılabilir.)

Örnek 15 *Maksimum-Minimum ile ilgili eşitsizliği göz önüne alarak* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *integrali için bir alt ve bir üst sınır bulunuz. Aynı soruyu* $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}dx$ *integrali için cevaplayınız.*

Örnek 16 $\int_0^1 f(x)dx = 2,\ \int_0^4 f(t)dt = -6,\ \int_3^4 f(z)dz = 1$ *ise* $\int_1^3 f(x)dx = ?$

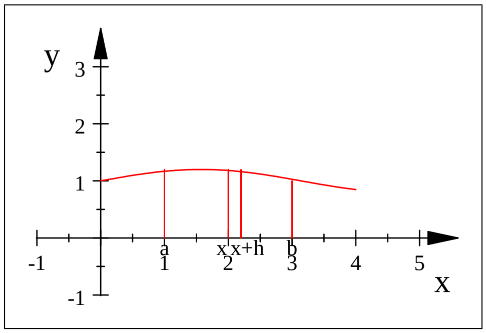
Örnek 17 *Hangi a ve b reel sayıları için* $\int_a^b (x - x^2)dx$ *integrali en büyük değere sahiptir? (İntegrantın pozitif olduğu yerde bu integral en büyük değere sahiptir. Dolayısıyla* $a = 0$ *ve* $b = 1$ *olmalıdır.)*

1.6 Belirli İntegrallerin Hesaplanması

Belirli integral ile fonksiyonun ilkeli arasındaki ilişki, bir fonksiyonun ortalama değeri, Kalkülüsün temel teoremi, türev ve integral arasındaki ilişki ve belirsiz integral tanımı bu kesimde verilecek.

Tanımdan görüleceği üzere belirli integral Riemann toplamlarının limiti olarak hesaplanmaktadır. Ancak bunun genellikle uzun ve zor olduğu açıktır. Bu kesimde f fonksiyonun $[a, b]$ aralığı üzerinde bir F ilkelinin bilinmesi halinde, $\int_a^b f(x)dx$ integralinin hesaplanmasında daha kolay ve kullanışlı bir yöntem geliştireceğiz. (f nin $[a, b]$ üzerindeki belirli integrali ile ilkeli arasındaki bu ilişkiyi Newton ve Leibniz ortaya çıkarmıştır).

Şimdi $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ ile tanımlı $A(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer f pozitif ve sürekli bir fonksiyon ve $x > a$ ise $A(x)$ fonksiyonu, $y = f(t)$ eğirisi altında $[a, x]$ aralığı üzerindeki bölgenin alanıdır. Böylece x artarken $A(x)$ de artar. Şekilden de görüleceği üzere x, h kadar artırıldığı zaman $A(x)$ alanı, $A(x+h) - A(x)$ kadar artar (ince şeridin alanı).



Diğer taraftan bu şeridin alanı yaklaşık olarak, genişliği h birim yüksekliği $f(x)$ birim olan dikdörtgenin alanı kadardır ki h ne kadar küçük olursa yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre $A(x+h) - A(x) \cong f(x)h$ olup $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \cong f(x)$ veya buradan $A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$ elde edilir. Bu ise bize A fonksiyonunun f nin bir ilkeli olduğunu gösterir. Şimdi F fonksiyonu f nin bir başka ilkeli ise $A(x) = F(x) + C$ olacak şekilde C sabiti vardır. Ayrıca $A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, $A(b) = \int_a^b f(x)dx$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= A(b) - A(a) \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Buradan da anlaşılacağı üzere f nin herhangi bir ilkelinin bilimesi halinde $\int_a^b f(x)dx$ integrali kolaylıkla hesaplanabilmektedir. f pozitif olmasa bile yukarıda bahsedilen işlemlerin doğru olduğu gerçeği Kalkülüsün Temel Teoreminin ikinci kısmında ifade edilecektir.

Şimdi Kalkülüsün Temel Teoreminin ispatında kullanacağımız fonksiyonun ortalama değeri kavramını tanımlayalım. Öncelikle aşağıdaki örneği inceleyelim.

24 saatlik gün boyunca T sıcaklığı $T = f(t)$ $(0 \leq t \leq 24)$ fonksiyonu ile verilsin. Gün içi ortalama sıcaklığı nasıl belirleriz? Örneğin sıcaklık ortalaması $\overline{T}$ ise bunu, saat başlarındaki sıcaklıkların aritmetik ortalaması olarak tanımlayabiliriz. Yani $t_i = i$ saat başlarını göstermek üzere

$$\overline{T} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} f(t_i)$$

diyebiliriz. Eğer günü 24 saatlik aralıklar yeine n tane eşit alt aralıklara bölersek daha iyi bir ortalama elde edebiliriz. Bu durumda

$$\overline{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

olur. n nekadar büyük olursa gerçek ortalama sıcaklık o kadar iyi bulunur. Sonuçta gerçek orlama sıcaklığı, n yi sınırsız olarak büyüterek

$$\overline{T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

şeklinde bulabiliriz. Sağ taraf bir Riemann toplamını hatırlatmaktadır. $a = 0$ ve $b = 24$ olmak üzere $\Delta t_i = \frac{b-a}{24}$ dersek

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \\
&= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \\
&= \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)dt
\end{aligned}$$

olur. Burada olduğu gibi $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyonun ortlama değeri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 18 *f, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O zaman $y = f(x)$ in $[a, b]$ deki ortalama değeri*

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 19 *$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0, 2]$ deki ortalama değeri*

$$\overline{y} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

olur.

Uyarı 20 *f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki ortalama değeri $\overline{y}$ ise $f(\overline{x}) = \overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ olacak şekilde en az bir $\overline{x} \in [a, b]$ vardır. Çünkü f, $[a, b]$ de sürekli olduğundan bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alır. Bunlar sırası ile m ve M ise $m = f(c)$ ve $M = f(d)$ olacak şekile $c, d \in [a, b]$ vardır. Ayrıca $m \le f(x) \le M$ olduğundan*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

veya

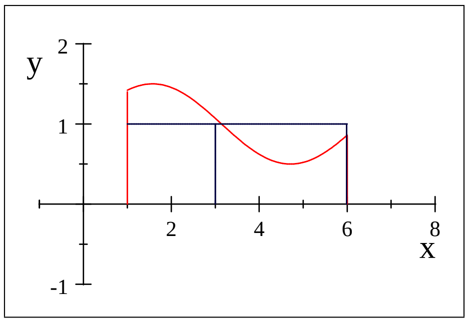
$$f(c) \leq \overline{y} \leq f(d)$$

olur. f *sürekli olduğundan Aradeğer Teoremi gereği* $\overline{y} = f(\overline{x})$ *olacak şekilde en az bir* $\overline{x} \in [a,b]$ *vardır.*

Uyarı 21 *Yukarıda verilen eşitlik*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})(b-a)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer f *pozitif değerli ise bu eşitlik,* $y = f(x)$ *altında kalan alanın,* $b-a$ *tabanlı* $f(\overline{x})$ *yükseklikli dikdörtgenin alanına eşit olduğunu belirtir.*



Uyarı 22 f *fonksiyonu* $[a,b]$ *üzerinde sürekli olmayan integrallenebilir bir fonksiyon ise* f *nin bu aralıkta* $\overline{y}$ *ortalama değeri vardır, ancak* $\overline{y} = f(\overline{x})$ *olacak şekilde bir* $\overline{x} \in [a,b]$ *noktası bulunmayabilir. (Bunun ile ilgili bölüm sonunda örnekler verilecektir)*

Teorem 23 (Kalkülüsün Temel Teoremi, 1. Kısım) *Eğer* f *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında sürekli ise* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *ile tanımlı* F *fonksiyonu* (a,b) *de türevlenebilirdir ve türevi* $f(x)$ *dir; yani*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

olur.

Ispat. İlk olarak türev tanımını doğrudan F fonksiyonuna uygulayalım. $x \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

olur. Ortalama değer kavramı dikkate alınacak olursa f sürekli olduğundan $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\overline{x})$ olacak şekilde $\overline{x} \in [x, x+h]$ vardır. Üstelik $h \to 0$ için $\overline{x} \to x$ olur. Böylece f sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= \lim_{\overline{x}\to x} f(\overline{x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 24 *Aşağıdaki verilenlere göre* $\frac{dy}{dx}$ *türevini hesaplayınız.*

1. $y = \int_a^x (t^3+1)dt$
2. $y = \int_x^5 t\sin t dt$
3. $y = \int_1^{x^2} \cos t dt$
4. $y = \int_x^{x^2} \sin(t^2)dt$

Örnek 25 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt$ *limitini hesaplatınız.*

Teorem 26 (Kalkülüsün Temel Teoremi, 2. Kısım) *Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve F de f nin bu aralıktaki herhangi bir ilkeli ise*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dır.

Ispat. Temel Teoremin birinci kısmında $G(x) = \int_a^x f(x)dx$ ile tanımlı G fonksiyonunun, f nin bir ilkeli olduğu belirtilmiştir. Bu durumda F ve G nin her ikisi de ilkel olduklarından $F(x) = G(x) + C$ olacak şekilde C sabiti vardır. O zaman

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= -\int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

bulunur. ■

Uyarı 27 *$F(b) - F(a)$ ifadesini alışılmış gösterimle $F(x) \mid_a^b$ biçiminde göstereceğiz. Yani $\int_a^b f(x)dx = F(x) \mid_a^b = F(b) - F(a)$ dir. Bu teoreme göre $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için f nin bu aralıkta bir ilkelinin bulunması yeterlidir.*

Örnek 28 *Aşağıdaki integralleri, integrantın bir ilkelini bularak hesaplayınız.*

1. $\int_{-1}^{2}(4-2x+3x^2)dx$
2. $\int_{0}^{\pi}\sin x\cos x dx$
3. $\int_{1}^{3}e^{2x}dx$

Uyarı 29 *Kalkülüsün Temel Teoreminden türev ve integral arasında aşağıdaki ilişkileri çıkarabiliriz.*

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

eşitliği, önce f fonksiyonunu integre eder sonra sonucun türevini alırsanız yine f yi elde edersiniz demektedir. Benzer şekilde

$$\int_{a}^{x} F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

eşitliği ise, önce F fonksiyonunu türevini alır sonra sonucu integre ederseniz F yi bir sabit farkıyla elde edersiniz demektedir.

Belirli integral hesaplamalarında bir fonksiyonun ilkeli ile sıkça karşılaşırız. Bu nedenle bir fonksiyonun ilkelini göstermede uygun bir gösterime ihtiyaç duyarız. Bu bölümün ilk kesiminde f fonksiyonunun ilkelini ters diferensiyel operatör yardımıyla $D^{-1}f(x)$ biçiminde göstermiştik. Ancak Kalkülüsün Temel Teoreminde ilkel ile belirli integral arasındaki ilişkiden dolayı, f nin ilkelini göstermek için geleneksel olarak Belirsiz integral diye adlandırılan $\int f(x)dx$ gösterimi kullanılır. Dolayısıyla

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ifadesi

$$F'(x) = f(x)$$

anlamına gelecektir.

Belirli ve Belirsiz integral arasındaki ayrıma dikkat edilmelidir. Belirli integral bir sayı, Belirsiz integral ise bir fonksiyon ailesidir. Bunlar arasınadaki ilişki ise Kalkülüsün Temel Teoreminden

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_{a}^{b}$$

şeklinde yazılabilir. Burada f nin sürekli olması gerektiğine dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun türevi ve ilkel arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa aşağıdaki belirsiz integraller tablosu oluşturulabilir. İntegral hesaplamalarında bunlardan sıkça yararlanılır.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Yine ters diferensiel operatörün lineer olduğu göz önüne alınırsa a ve b reel sabitler olmak üzere

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

yazılabilir.

Örnek 30 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int (10x^2 - 2\sec^2 x)dx$
2. $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$
3. $\int_0^2 (2x^3 - 6x + \frac{3}{1+x^2})dx$
4. $\int x - \sqrt{x} dx$
5. $\int_{-1}^3 |x| \, dx$
6. $\int_0^2 |x - \sqrt{x}| \, dx$

1.6.1 Ek Sorular

Örnek 31 *Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen aralıklardaki ortalama değerini bulunuz.*

1. $f(x) = x^4$, $[0, 2]$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 4]$
3. $f(x) = \sin 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Örnek 32 *Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak verilen fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 1)^{17} dt$

2. $f(x) = \int_x^{10} (t + \frac{1}{t})dt$

3. $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}dt$

4. $f(x) = \int_1^{\sin x} (t^2+2)^3 dt$

Örnek 33 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ *ifadesi doğru mudur? Bu durum Kalkülüsün Temel Teoremi ile çelişir mi? Neden? İntegrantın grafiğini çiziniz ve bu durumu yorumlayınız.*

Örnek 34 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$ *limitini bir integralin değeri olduğu farkına vararak hesaplayınız.*

Örnek 35 *Yarıçapı 3 birim olan küre merkezinden x birim uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Dairesel dik kesitin alanının ortalama değerini bulunuz.*

Örnek 36 $\int_0^2 \|x\|\, dx$ *integralini hesaplayınız. Buradan $f(x) = \|x\|$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığındaki $\overline{y}$ ortalama değerini bulunuz. $[0,2]$ aralığında $f(\overline{x}) = \overline{y}$ eşitliğini sağlayan bir $\overline{x}$ noktası var mıdır?*

Örnek 37 $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}dx$ *integraline alt ve üst sınır bulunuz.*

Örnek 38 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-1}^{0} (2x - e^x)dx$

2. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

6. $\int_{-1}^{2} \left|x - x^2\right| dx$

Örnek 39 $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}du$ *ve* $F(x) = \int_1^x f(x)dx$ *ise* $F''(2)$ *yi hesaplayınız.*

Örnek 40 $[-2,2]$ *aralığında* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ *fonksiyonunun ortalam değerini bulunuz. (Belirli integrali alan gibi yorumlayarak hesaplayınız)*

Örnek 41 $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4)$ *nedir?*

2 İntegralleme Teknikleri

Bu bölümde integral hesaplama yöntemleri üzerinde duracağız. Bunlar sırası ile Değişken Değiştirme Yöntemi (Yerine Koyma Yöntemi), Kısmi İntegrasyon, Bazı İndireme Bağıntıları, Trigonometrik İntegraller, Basit Kesirlere Ayırma ve İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali şeklinde ifade edilebilir.

Kalkülüsün Temel Teoremi $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralini hesaplamak için $f(x)$ in hergangi bir $F(x)$ ilkelinin bulnmasının yereli olduğunu söylemektedir. Aranan ilkeli bulmak için daha çok deneme-yanılma ile veya "hangi fonksiyonun türeni $f(x)$ dir" düşüncesini dikkate alarak işlem yaptık. Ancak bu ilkel bulma veya belirsiz integral hesaplama düşüncesi genellikle yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle daha karmaşık fonksiyonların integralini hesplamada çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu kesimde bu yöntemler üzerinde duracağız. Fakat burada bahsedilen yöntemlerinde yeresiz kaldığı durmların var olduğunu belirtilmelidir. Örneğin basit görünüşlü

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \sqrt{1+x^4}dx \text{ veya } \int \frac{dx}{\ln x}$$

gibi integraller burada belirtilecek olan yöntemler ile bilinen cebirsel ve transandant fonksiyonların sonlu toplamları biçiminde hesaplanamazlar. Buradanda anlaşılacağı gibi integralleme işlemi diferensiyelleme gibi basit bir işleme indirgenemez.

2.1 Değişken Değiştirme Yöntemi

Bu yöntem integral hesaplama yöntemleri içinde en sık kullanılan yöntemdir. Bileşke fonksiyonun türevinde kullanılan Zincir Kuralına dayanan bu yöntem

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

tipindeki integraller için kullanılır. Burada $g(x) = t$ denirse (değişken değişimi yapılırsa) $g'(x)dx = dt$ olduğundan

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

integraline dönüşür. Bu integral ilkine göre daha basit ve sadedir. Burada dikket edilmesi gereken şey değişken seçimidir. Eğer değişken uygun biçimde seçilmezse integral daha da karmaşık hale gelebilir. Ayrıca integral yeni deişkene bağlı hesaplanacağından sonuçta tekrar x değişkenine dönülmelidir.

Örnek 42 *$\int(2x+1)^9dx$ integralini $2x+1=t$ dönüşümü yaparak hesaplayabil-*

iriz. O zaman $2dx = dt$ olacağından

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^9 dx &= \int \frac{1}{2} t^9\, dt \\ &= \frac{t^{10}}{20} + C \\ &= \frac{(2x+1)^{10}}{20} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 43 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int x^3 \cos(x^4+1)dx$
2. $\int \frac{(1+\ln x)^4}{x} dx$
3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int \tan x dx$
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$
6. $\int \frac{x^2}{(x-2)^5} dx$
7. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$
8. $\int \frac{dx}{(2+\tan x)\sin^2 x}$

Bu örneklerden de anlaşılacağı gibi her bir integrale kendine has bir değişken değiştirmesi uygulanmaktadır. Fakat bazı özel tipte olan integraller için Trigonometrik Değişken Değiştirme (Trigonometrik Yerine Koyma) adı verilen yöntem kullanılmaktadır. $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ya da $\sqrt{a^2+x^2}$ gibi cebirsel ifadelerden birini içeren integraller için bu cebirsel ifadeleri kökten kurtaran bir trigonometrik değişken değişikliği yapılabilir.

Cebirsel ifade	Değişken	Özdeşlik
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$	$1-\sin^2 t = \cos^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$	$1+\tan^2 t = \sec^2 t$

Örnek 44 $\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx$ *integralini hesaplayınız. İntegrant* $\sqrt{a^2-x^2}$ *şeklinde bir cebirsel ifadeyi içermektedir. Bu nedenle* $x = 3\sin t$ *değişimi yapılabilir. O zaman* $dx = 3\cos t dt$ *olacağından integral*

$$\begin{aligned} \int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{3\sin t+8}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} 3\cos t dt \\ &= \int (3\sin t+8)dt \\ &= -3\cos t+8t+C \end{aligned}$$

olur. Burada $x = 3\sin t$ *eşitliğinden* $t = \arcsin\frac{x}{3}$ *olup*

$$\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx = -3\cos(\arcsin\frac{x}{3}) + 8\arcsin\frac{x}{3} + C$$

bulunur. Ancak genellikle $\cos(\arcsin\frac{x}{3})$ *ifadesi daha sade biçimde yazılır. Bunun için sinüsü* $\frac{x}{3}$ *olan açının kosinüsü hesaplanır. Bu ise* $\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ *olduğundan*

$$\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}} = -\sqrt{9-x^2} + 8\arcsin\frac{x}{3} + C$$

olarak bulunur.

Örnek 45 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$
2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$
3. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$
6. $\int \sqrt{9-4x^2}dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

Eğer integrant trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi şeklinde ise bazen Yarım Açı Yöntemi denilen değişken değişikliği yapılabilir. Bu yöntemde

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü yapılarak $\sin x$, $\cos x$ ve dx ifadeleri hesaplanır. Bu durumda $x = 2\arctan t$ olacağından $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olur. Yine (üçgen çizerek) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ olur.

Örnek 46 $\int \dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$ *integralini hesaplayınız.* $\tan\frac{x}{2} = t$ *dönüşümünün uygulanması ile integral*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+1}{t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int (t+2+\frac{1}{t})dt \\
&= \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|)+C \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 47 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \dfrac{dx}{5+3\cos x}$
2. $\int \dfrac{dx}{\sin x}$
3. $\int \dfrac{dx}{2+\sin x-\cos x}$

Uyarı 48 *Eğer bir belirli integral değişken değiştirme yöntemi ile hesaplanacaksa ve tekrar eski değişkene dönülmek istenmiyorsa integrasyon sınırlarını da değiştirmek gerekir. Buna göre* $g(x) = t$ *dönüşümü yapıldığında*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

yazılır.

Örnek 49 $\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ *integralini hesaplayınız. İntegrali hesaplamak için iki seçeneğimiz var.*

- *$x^3+1=t$ dönüşümü yaparsak $3x^2dx=dt$ olur. Ayrıca $x=-1$ için $t=0$ ve $x=1$ için $t=2$ olacağından*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int_0^2 \sqrt{t}dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

bulunur.

- *İntegrali belirsiz integral olarak hesaplarız. Eski değişkene dönüp sınırları yazarız. $x^3+1=t$ dönüşümü yaparsak $3x^2dx=dt$ olur. Böylece*

$$\begin{aligned}\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int \sqrt{t}dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Örnek 50 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
3. $\int_0^{a} x\sqrt{a^2-x^2}dx$
4. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Uyarı 51 *Simetrik bir aralık üzerinde tanımlı fonksiyonların integrali için aşağıdaki bilgiler kullanılabilir. f fonksiyonu $[-a,a]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.*

- *f çift fonksiyonsa*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

- *f tek fonksiyonsa*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

dır.

Bu eşitlikleri görmek için aşağıdaki yol izlenebilir. Belirli integralin Toplanabilirlik özelliğini kullanarak iki parçaya ayıralım ve ilkine $x = -t$ dönüşümü uygulayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= \int_{a}^{0} -f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Şimdi eğer f çift fonksiyon ise $f(-t) = f(t)$ olacağından (belirli integralin değişkenden bağımsız olduğunu hatırlayarak)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

bulunur. Eğer f tek fonksiyon ise $f(-t) = -f(t)$ olacağından

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

bulunur.

Örnek 52 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$
2. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^3}{1+x^4}dx$
3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2 \sin x}{1+x^6}dx$

2.1.1 Ek Soruar

Örnek 53 *Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx$
2. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
5. $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}dx$
6. $\int xe^{x^2}dx$
7. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}dx$
8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$
9. $\int \frac{dx}{1+e^x}$
10. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$
11. $\int \tan^2 x dx$
12. $\int \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$
13. $\int \sqrt{1+\cos x}dx$

Örnek 54 *Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^3 x dx$
2. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$
3. $\int_0^2 x \left\| x \right\| dx$
4. $\int_0^2 x \left|1-x^2\right| dx$
5. $\int_0^1 x^2(1-x)^{10}dx$

6. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Örnek 55 *$\int_{-2}^2 (x+3)\sqrt{4-x^2}dx$ integralini iki integralin toplamı biçiminde yazarak ve integrallerden birini alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 56 *$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$ integralini, değişken değişikliği yaparak ve çıkan integrali alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 57 *f sürekli ve $\int_0^4 f(x)dx = 10$ ise $\int_0^2 f(2x)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 58 *f sürekli ve $\int_0^9 f(x)dx = 4$ ise $\int_0^3 xf(x^2)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 59 *f sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}$$

integralini hesaplayınız. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3x^2-3x+1}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$$

integrallerini hesaplaynız.

Örnek 60 *Aşağıdaki her iki durum için $f(4)$ ü hesaplayınız*

1. $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos\pi x$

2. $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x\cos\pi x$

2.2 Kısmi İntegrasyon

Kısmi integrasyon $\int f(x)g(x)dx$ formundaki integralleri basitleştiren bir tekniktir. f türevlenebilen ve g integre edilebilen fonksiyonlar olduğunda kullanışlıdır.

$$\int x\cos x dx \text{ ve } \int x^2 e^x dx$$

integralleri bu türdendir. Bilndiği gibi f ve g türevlenebilen fonksiyonlar ise türevin çarpım kuralı

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

olduğunu söyler. Belirsiz integraller cinsinden bu eşitlik

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx &= \int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]\,dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

halini alır. Buradan terimleri yeniden düzenleyerek

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx - \int f'(x)g(x)dx$$

formülünü elde ederiz. Bu ise bizi kısmi integrasyon formülüne götürür:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Bu formül diferensiyel formda yazıldığında daha kolay hatırlanabilir. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ olsun. O zaman kısmi integrasyon formülü

$$\int udv = uv - \int vdu$$

şeklinde yazılabilir. Bu formül $\int vdu$ integrali $\int udv$ integralinden daha kolay olması durumunda kullanışlıdır.

Örnek 61 *$\int x\sin xdx$ integralini hesaplayınız. $u = x$ ve $dv = \sin xdx$ denirse $du = dx$ ve $v = -\cos x$ olacağından*

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= -x\cos x - \int -\cos xdx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

olur. Aslında, burada $dv = \sin xdx$ eşitliğinden v yi bulmak için bir belirsiz integral hesaplanmaktadır. Dolayısıyla

$$\int dv = \int \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x + C_1$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= x(-\cos x + C_1) - \int(-\cos x + C_1)dx \\ &= -x\cos x + xC_1 + \sin x - xC_1 + C \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bize v yi bulmak için alınana belirsiz integralde C_1 sabitinin alınıp alınmamasının sonucu değiştirmeyeceğini göstermektedir.

Verilen bir integrale Kısmi integrasyon formülünü uygulamak için integrant u ve dv gibi (dv kısmı dx diferensiyelini içerecek şekilde) iki çarpana ayrılır. Bunun için kesin bir yöntem olmasa da genel strateji kolaylıkla integrallenebilen en karmaşık çarpanı dv olarak seçmektir. Aşağıda integrantın bazı özel durumları için bu ayrımın nasıl yapıması gerektiğine dair bir yol verilmektedir.

1. Eğer integrant bir polinom ile üstel fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, geri kalan kısma dv,

2. Eğer integrant bir polinom ile trigonometrik fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, geri kalan kısma dv,

3. Eğer integrant bir polinom ile logaritmik fonksiyonun çarpımı ise logaritmik fonksiyona u, geri kalan kısma dv,

4. Eğer integrant sadece bir fonksiyondan ibaretse fonksiyona u, $dx = dv$ demek yarar sağlar.

Bazı durumlarda integrali hesaplamak için kısmi integrasyon yöntemini birkaç kez uygulamak gerekir. Bazen ise hesabı istenen integral karşımıza çıkabilir. Bu durumda bu integrali eşitliğin soluna atıp işleme devam etmek gerekir.

Örnek 62 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)+C$
2. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2\cos x}(\cos x \ln(2\cos 2x+2)+2x\sin x)+C$
3. $\int x^5 \ln x dx = \frac{1}{6}x^6\ln x - \frac{1}{36}x^6+C$
4. $\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x)+C$
5. $\int x^2e^xdx = e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$
6. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a(\cos bx)e^{ax}+be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+C$
7. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)+C$
8. $\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$
9. $\int x\arcsin x dx = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{2}x^2\arcsin x + C$
10. $\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + C$

Uyarı 63 *f' ve g' fonksiyonlarının her ikisininde $[a,b]$ aralığında sürekli olması halinde Kısmi integrasyon formülü belirli integraller içinde kullanılabilir. Bu durumda*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

eşitliğini dikkate almak gerekir.

Örnek 64 *$\int_0^4 xe^{-x}dx$ integralini hesaplayınız. $u = x$, $dv = e^{-x}dx$ denirse $du = dx$ ve $v = -e^{-x}$ olur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}dx &= -xe^{-x}\Big|_0^4 - \int_0^4 -e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^4 \\ &= -5e^{-4}+1\end{aligned}$$

olur.

Örnek 65 *Aşağdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx$
2. $\int_0^1 (x^2 + x)e^x dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

Kısmi integrasyon yöntemi ile yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha düşük dereceden bir ifedenin integraline dönüştürülebilir. Bu yöntemle elde edilen bağıntılara indirgeme bağıntıları denir.

Örnek 66 $\int \cos^n x dx$ *integrali için bir indirgeme formülü bulunuz.* $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$ *olarak düşünüp*

$$u = \cos^{n-1} x \text{ ve } dv = \cos x dx$$

diyelim. O zaman

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx \text{ ve } v = \sin x$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

elde edilir.

Örnek 67 $\int \cos^3 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 68 *Aşağıdaki integraller için bir indirgeme formülü bulunuz.*

1. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ *(*$u = \frac{1}{\sin^{n-2} x}$ *ve* $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$*)*
2. $\int \tan^n x dx$ *(*$u = \tan^{n-2} x$ *ve* $dv = \tan^2 x dx$*)*
3. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ *(*$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ *integraline kısmi integrasyon uygulanır.* $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ *ve* $dv = dx$*)*

2.2.1 Ek Sorular

Örnek 69 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız*

1. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ *(*$u = xe^x$ *ve* $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$*)*
2. $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx$
3. $\int x\ln(x^2 + 1)dx$
4. $\int \arctan\sqrt{x}dx$
5. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
6. $\int \frac{dx}{(4x^2+4x+2)^2}$
7. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx$
8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\csc^2 xdx$
9. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$
10. $\int \sin^2 xdx$

Örnek 70 *Aşağıdaki integraller için bir indirgeme formülü bulunuz.*

1. $\int \sin^n xdx$
2. $\int \frac{dx}{\cos^n x}$
3. $\int (\ln x)^n dx$

Örnek 71 *Aşağıdaki eşitliği doğrulayınız.*

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)dx.$$

Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$
2. $\int_0^1 xe^x dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x - \pi)\cos xdx$

2.3 Trigonometrik İntegraller

Bu integraller altı temel trigonometrik fonksiyonun cebirsel birleşimlerini içerem integrallerdir. Bunları ilke olarak her zaman sinüs ve kosinüs cinsinden ifade edebiliriz, ancak $\int \sec^2 xdx = \tan x + C$ integralinde olduğu gibi başka fonksiyonlarla çalışmak daha basit olabilir.

2.3.1 Sünüs ve Kosinüsün Kuvvetlerinin Çarpımı

m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

şeklindeki integrali göz önüne alalım. m ve n nin durumlarına göre uygun değişken değişikliğini iki duruma ayırabiliriz.

- m tek ise $\cos x = t$, n tek ise $\sin x = t$ dönüşümü uygulanır. (Her ikisininde tek olması durumunda yüksek dereceli olana dönüşüm uygulamak integralin hesaplanmasını kolaylaştırır)
- m ve n nin her ikiside çift ise integral $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ve $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ eşitlikleri yardımıyla $\cos 2x$ in kuvvetleri cinsinden yazılabilir.

Örnek 72 *$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ integralini hesaplayınız.* $\cos x = t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx \\
&= \int (t^2-1)t^2 dt \\
&= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 73 *$\int \cos^5 x dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 74 *$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x$ integralini* *hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\int \cos^2 2xdx-\int \cos^3 2xdx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx-\int (1-\sin^2 2x)\cos 2xdx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{x}{2}+-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}\int (1-t^2)dt\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{x}{2}+-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C \\
&= \frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

2.3.2 Kareköklerden Kurtulmak

Bazı trigonometrik özdeşliklerden yararlanarak kareköklü trigonometrik integralleri basitçe hesaplayabiliriz.

Örnek 75 *$\int \sqrt{1+\cos 4x}dx$ integralini hesaplamak için $1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$ eşitliğinden yaralanabiliriz. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+\cos 4x}dx &= \int \sqrt{2}\cos 2xdx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

olur.

Burada eğer belirli integral hesaplanacaksa $\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2}\,|\cos x|$ yazılmalıdır.

Örnek 76 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx &= \int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx\\ &= \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos xdx\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos xdx\right)\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Örnek 77 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin 2x}dx$ *integralini hesaplayınız.* $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ *olduğu dikkate alınırsa*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin 2x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x+\cos x\right|dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx\\ &= 2\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 78 $\int\sqrt{1-\sin 4x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

2.3.3 Tanjant ve Sekantın Kuvvetlerinin Çarpımı

m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$\int\tan^m x\sec^n xdx$$

şeklindeki integrali göz önüne alalım. Bu tip integraller m ve n nin durumlarına farklı yollardan hesaplanır.

- n çift ise $\tan x=t$ dönüşümü yapılır ve $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ özdeşliğinden yararlanılır.
- m tek $\sec x=t$ dönüşümü yapılır ve $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ özdeşliğinden yararlanılır.
- m çift n tek ise $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ özdeşliği ile integral sekantın tek kuvvetleri cinsinsinden yazılabilr.

Örnek 79 $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$ *integralini hesaplayınız.* $\tan x = t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx \\
&= \int t^3 (1 + t^2) \\
&= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 80 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \tan^4 x dx$
2. $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$
3. $\int \sec x dx$
4. $\int \tan^2 x \sec x dx$
5. $\int \tan^3 x dx$

2.3.4 Sinüs ve Kosinüsün Çarpımları

$\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$ ve $\int \cos ax \cos bx dx$ tipindeki integraller aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}[\cos(a - bx) - \cos(a + b)x] \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\sin(a + b)x + \sin(a - b)x] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}[\cos(a + b)x + \cos(a - b)x]
\end{aligned}$$

Örnek 81 *Aşağıdaji integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \sin 3x \sin 5x dx$
2. $\int \sin 4x \cos 3x dx$
3. $\int \cos 5x \cos 4x dx$

2.3.5 Ek Sorular

Örnek 82 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$
2. $\int \cot^5 x \csc^4 x dx$
3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$
5. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$
6. $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$
7. $\int \sqrt{1 - \cos 4x} dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \sin x} dx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{1 - \cos 2x} dx$
10. $\int \sin^2 x \cos 3x dx$
11. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$

Örnek 83 $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$ *integralini (a) kısmi integrasyonla, (b) bir trigonometrik değişken değiştirmesi ile, (c) bir başka değişken değiştirmesi ile hesaplayınız.*

2.4 Rasyonel Fonksiyonların Basit Kesirlere Ayırma İle İntegrasyonu

Hatırlanacağı gibi bir rasyonel fonksiyon, iki polinomun oranı şeklinde yazılan fonksiyonlardır. Bu kesimde bir rasyonel fonksiyonun integralinin nasıl hesaplanacağını göreceğiz. Bunun için rasyonel fonksiyonları daha basit kesirlerin toplamı olarak yazacağız.

Öncelikle $g(x) = \frac{2}{x+5}$ ve $h(x) = \frac{3}{x+1}$ rasyonel fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu iki fonksiyonun toplamı

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ &= \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x+1} \\ &= \frac{5x+17}{(x+5)(x+1)} \\ &= \frac{5x+17}{x^2+6x+5} \qquad (2) \end{aligned}$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyonu verir. Şimdi f fonksiyonunun integralini hesaplama problemi ile karşılaştığımızı düşünelim. Buradan da görüleceği üzere

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+17}{x^2+6x+5}dx &= \int \left(\frac{2}{x+5}+\frac{3}{x+1}\right)dx \\ &= \int \frac{2}{x+5}dx + \int \frac{3}{x+1}dx \\ &= 2\ln|x+5| + 3\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

olur. Bu örnek bazı $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonlarının integrali için bir yol göstermektedir. Bu yöntem (2) de gösterilen işlemi tersine çevirmekten oluşur.

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyonu göz önüne alalım. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının dereceleri sırası ile m ve n olsun ve bunların ortak çarpanı olmasın. Eğer $m < n$ ise $f(x)$ rasyonel fonksiyonuna bir Has rasyonel fonksiyon (**Has kesir**) denir. Eğer $m \geq n$ ise $f(x)$ rasyonel fonksiyonu (polinom bölmesi yapılarak) bir has kesir ile bir polinomun toplamı olarak yazılabilir. Yani $K(x)$ bir polinom ve $\frac{R(x)}{Q(x)}$ de has kesir olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

olur. O zaman $f(x)$ in integralinin hesaplanması için $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinin integralinin hesaplanması yeterlidir.

Bilindiği gibi katsayıları reel olan bir polinom, **lineer çarpanlar** $(ax+b)$ ile **kuadratik çarpanların** ($b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere ax^2+bx+c) çarpımı olarak yazılabilmektedir. Dolayısıyla $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinde $Q(x)$ polinomu bu şekilde çarpanlara ayrıldığında bu has kesirin integrallenmesi $k \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ ve } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} \tag{3}$$

tipinde **Basit kesir** adı verilen kesirlerin integrallenmesine indirgenir. Şimdi (3) tipindeki fonksiyonların integrali ile ilgili bir kaç örnek verelim.

Örnek 84 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{3}{x+2}dx$

$$\int \frac{3}{x+2}dx = 3\ln(x+2) + C$$

2. $\int \frac{5}{(x+3)^4}dx$

$$\int \frac{5}{(x+3)^4}dx = -\frac{5}{3(x+3)^3} + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+4x+8} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx$. *İlk olarak, paydadaki kuadratiğin türevini pay kısmında oluşturalım.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx &= \int \frac{2x+4+1}{x^2+4x+13}dx \\
&= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+13} \\
&= \ln(x^2+4x+13) + \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} \\
&= \ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

5. $\int \frac{2x+5}{(x^2+6x+10)^2}dx$. *İlk olarak, paydadaki kuadratiğin türevini pay kısmında oluşturalım.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{(x^2+6x+10)^2}dx &= \int \frac{2x+6-1}{(x^2+6x+10)^2}dx \\
&= \int \frac{2x+6}{(x^2+6x+10)^2}dx - \int \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Burada ilk integralde $x^2+6x+10=t$ *dönüşümü yapılırsa*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{2x+6}{(x^2+6x+10)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} \\
&= -\frac{1}{t}+C_1 = -\frac{1}{x^2+6x+10}+C_1
\end{aligned}$$

olur. İkinci integral ise $x+3=t$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2} = \int \frac{dx}{((x+3)^2+1)^2} \\
&= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

halini alır. Bu son integral ise daha önce aşağıdaki şekilde hesaplanmıştı. $\int \frac{dt}{t^2+1}$ *integraline kısmi integrasyon uygulanırsa* ($u=\frac{1}{t^2+1}$, $dv=dt$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2+1} &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt \\
&= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C_2\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= -\frac{1}{x^2+6x+10} + \frac{x+3}{2(x^2+6x+10)} + \frac{1}{2}\arctan(x+3) + C \\ &= \frac{x+1}{2(x^2+6x+10)} + \frac{1}{2}\arctan(x+3) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\frac{R(x)}{Q(x)}$ has kesirinin basit kesirlere ayrılması ile ilgili dikket edilmesi gereken durumları inceleyelim.

2.4.1 Farklı Lineer Çarpanlar

Eğer $Q(x)$ paydası

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

şeklinde n tane farklı lineer çarpandan oluşuyorsa has kesirin basit kesirlere ayrımı, $A_1, A_2, \cdots A_n$ reel sabitler olmak üzere

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

şeklindedir. Yani herbir lineer çarpan için bir basit kesir yazılır.

Örnek 85 $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

yazımından

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

olur. O zaman $(A+B)x + 3A - B = 2x+1$ *eşitliğinden*

$$\begin{aligned}A+B &= 2 \\ 3A-B &= 1\end{aligned}$$

olup $A = \frac{3}{4}$ *ve* $B = \frac{5}{4}$ *bulunur. O zaman*

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx &= \int \left(\frac{3/4}{x-1} + \frac{5/4}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 86 *$Q(x)$ polinomu n tane farklı lineer çarpandan oluşması halinde has kesiri basit kesirlere ayırmanın kolay bir yolu vardır. Örneğin,*

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

özdeşliğinde her iki yan $(x-1)$ ile çarpıldığında

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

olur. Bu son ifadede $x=1$ koyarsak $A = \frac{1^2+1}{(1-2)(1-3)} = 1$ olur. Benzer şekilde

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x-2)}{x-1} + B + \frac{C(x-2)}{x-3}$$

de $x = 2$ yazılırsa $B = -5$ bulunur. Yine $C = 5$ olur. Aslında A sayısı $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ has kesirinin paydasındaki $(x-1)$ çarpanını kapatıp $x=1$ yazmakla bulunabilir. Yani

$$\begin{aligned} A &= \frac{1^2+1}{\underbrace{[(x-1)]}_{Kapat}(1-2)(1-3)} = 1, \\ B &= \frac{2^2+1}{(2-1)\underbrace{[(x-2)]}_{Kapat}(2-3)} = -5, \\ C &= \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)\underbrace{[(x-3)]}_{Kapat}} = 5 \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

bulunur. Bu yöntem ile basit kesirlerin sabitlerini bulma işlemine Kapatma yöntemi vaya Heaviside yöntemi denir.

Örnek 87 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{x-4}{x^3+3x^2-10x}dx$

2. $\int \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+3)}dx$

3. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

2.4.2 Tekrarlı Lineer Çarpanlar

Eğer $Q(x)$ paydası a ve b reel sayılar olmak üzere tekrarlı $(ax+b)^k$ lineer çarpanını içeriyorsa has kesirin basit kesirlere ayrımı, $A_1, A_2, \cdots A_n$ reel sabitler olmak üzere

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

şeklindedir. Yani $ax+b$ lineer çarpanının herbir kuvveti için bir basit kesir yazılır.

Örnek 88 $\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} dx$ *integralini hesaplayalım.*

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

yazımından payda eşitleme ile

$$\begin{aligned} x^2+2x+4 &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \\ &= Ax^2 + (2A+B)x + A + B + C \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ 2A+B &= 2 \\ A+B+C &= 4 \end{aligned}$$

eşitliklerinden $A=1$, $B=0$ ve $C=3$ olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)^2} + C_1 \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 89 *$Q(x)$ polinomu tekrarlı lineer çarpandan oluşması halinde has kesiri basit kesirlere ayırmanın kolay bir yolu vardır. Örneğin*

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

ifadesinden payda eşitleme ile

$$x^2+2x+4 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \tag{4}$$

yazılır. Burada $x=-1$ yazıldığında $C=3$ bulunur. (4) eşitliğinden türev alırsak

$$2x+2 = 2A(x+1) + B$$

olup $x=-1$ yazılırsa $B=0$ ve yine türev alarak

$$2=2A$$

dan $A=1$ bulunur.

Örnek 90 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$

2. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

2.4.3 Lineer Çarpan ile Tekrarlı Lineer Çarpan

Örnek 91 *$\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx$ integralini hesaplayalım. Yukarıdaki açıklamalar dikkate alındığında intagrant*

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{2x-1}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} 6x-1 &= Ax^2(2x-1)+Bx(2x-1)+C(2x-1)+Dx^3 \\ &= (2A+D)x^3+(-A+2B)x^2+(-B+2C)x-C \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte $x=0$ alınırsa $C=1$ ve $x=\frac{1}{2}$ alındığında $D=16$ bulunur. Yine x^3 ve x^2 nin katsayıları dikkate alınırsa $A=-8$ ve $B=-4$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^3(2x+1)}dx &= \int \left(-\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{16}{2x-1}\right)dx \\ &= -8\ln|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}+8\ln|2x-1|+C_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 92 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

2. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x+2)^2}$

3. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

4. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

2.4.4 Kuadratik Çarpan

Eğer has kesirin $Q(x)$ paydasında ($b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere)

$$ax^2 + bx + c$$

şeklinde kuardaratik çarpan varsa bu çarpan için basit kesir, A, B reel sabitler olmak üzere

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

şeklindedir. Her farklı kuadratik çarpan için A ve B farklı alınarak bir basit kesir yazılır. Tekrarlı kuadratik çarpan için ise tekrarlı lineer çarpanda olduğu gibi işlem yapılır.

Örnek 93 *$\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx$ integralini hesaplayalım. Payda $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$ şeklinde bir tekrarlı lineer çarpan ile bir kuadratik çarpanın çarpımıdır. O zaman integrant*

$$\frac{x+3}{x^4+9x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} x + 3 &= A(x^3 + 9x) + B(x^2 + 9) + (Cx + D)x^2 \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 9Ax + 9B \end{aligned}$$

olup $x = 0$ yazılırsa $B = \frac{1}{3}$ bulunur. Yine $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{9}$ ve $D = -\frac{1}{3}$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx &= \int \left(\frac{1}{9x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{x+3}{9(x^2+9)} \right) dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\int \frac{x+3}{x^2+9}dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{1}{18}\int \frac{2x+6}{x^2+9}dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{1}{18}\int \frac{2x}{x^2+9}dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+9} \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} - \frac{1}{18}\ln(x^2+9) - \frac{1}{9}\arctan\frac{x}{3} + C_1 \\ &= \frac{1}{18}\ln(\frac{x^2}{x^2+9}) - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\arctan\frac{x}{3} + C_1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 94 *$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx$ integralini hesaplayalım. Payda farklı iki kuadratik çarpanın çarpımıdır. O zaman integrant*

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax+B)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(3A+2B+C)x+3B+D \end{aligned}$$

den

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 2A+B+D &= 0 \\ 3A+2B+C &= 4 \\ 3B+D &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Denklemlerin çözümü $A=1, B=1C=-1$ ve $D=-3$ değerlerini verir. O zaman

$$\begin{aligned} \int \frac{4xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} &= \int \left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3}\right)dx \\ &= \int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+3}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} - 2\int \frac{dx}{x^2+2x+3} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}\right) + \arctan x - \sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + C_1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 95 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ *integralini hesaplayalım. Payda da bir tekrarlı kuadratik çarpan vardır. O zaman integrant*

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Buradan

$$\begin{aligned} x^2 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D \end{aligned}$$

ve böylece $A = 0,\ B = 1, C = 0$ *ve* $D = -1$ *bulunur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C_1 \\
&= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C_1
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 96 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$
2. $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$
3. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$
4. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$
5. $\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1} dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
7. $\int \frac{dx}{x^3+1}$
8. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

2.4.5 İntegrantı Rasyonel Hale Getirerek İntegralleme

Bazı cebirsel ve transandant fonksiyonlar uygun bir değişken değişimi ile rasyonel hale dönüştürülebilir. Böylece yukarıda belirtilen yollar ile integralleme yapılabilir.

Örnek 97 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ *integralinde* $x + 1 = t^2$ *dönüşümü yapılırsa*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2dx}{t^2-1} \\
&= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C
\end{aligned}$$

olur.

$P(x)$ bir polinom, a, b, c, d reel sayılar ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere olmak üzere

$$\int P(x)\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$$

tipindeki integraller

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

dönüşümü yardımıyla bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüştürülebilir.

Örnek 98 *$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$ integralini hesaplayalım. $\frac{x}{2-x} = t^2$ denirse $x = \frac{2t^2}{1+t^2}$ olur. Ozaman $dx = \frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ olacağından*

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

olur. Bu son integral bir rasyonel fonksiyonun integralidir ve basit kesirler yardımıyla hesaplanabilir. Ancak biz burada hem farklı bir yol öğrenmek ve hemde integrali daha kolay hesaplamak için $t = \tan u$ dönüşümü yapalım. O zaman $dt = \sec^2 udu$ olup

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx &= \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt \\
&= \int \frac{4\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\sec^2 udu \\
&= 4\int \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u}du \\
&= 4\int \sin^2 udu \\
&= 2\int (1-\cos 2u)du \\
&= 2u - \sin 2u + C \\
&= 2\arctan t - 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t) + C \\
&= 2\arctan t - \frac{2t}{1+t^2} + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}} - \frac{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}{1+\frac{x}{2-x}} + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{2x-x^2} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 99 *Aşağıdaki integralleri uygun bir değişken değişimi ile rasyonal hale getirerek hesaplayınız.*

1. $\int \sqrt{1+e^x}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$
3. $\int \frac{xdx}{x-\sqrt[3]{x^4}}$
4. $\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$
5. $\int \frac{dx}{\cos x}$
6. $\int \frac{\cos x dx}{1-\sin^3 x}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-\sin 2x}$
8. $\int \frac{\cos x dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$
9. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

2.4.6 Ek Sorular

Örnek 100 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$
2. $\int \frac{x^3-4x-1}{x(x-1)^3}dx$
3. $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}dx$
4. $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$
5. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$
6. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$
7. $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

Örnek 101 *Aşağıdaki integralleri rasyonal hale getirerek hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
2. $\int \frac{1+\ln x}{x(3+2\ln x)^2}dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$
4. $\int x \arctan x dx$
5. $\int x^2\ln(1+x)dx$

6. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$

8. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx$

2.5 Bazı İrrasyonel Fonksiyonların İntegrali

Bu kesimde bazı irrasyonel fonksiyonlarının integralinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler üzerinde duracağız.

2.5.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı

a, b ve c reel sabitlerinin durumlarına göre $ax^2 + bx + c$ ifadesi $k^2 - u^2$ veya $u^2 \pm k^2$ haline dönüştürülebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} &= \arcsin \frac{u}{k} + C \text{ veya} \\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} &= \ln(u + \sqrt{u^2 \pm k^2}) + C \end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanılarak integral hesaplanır.

Örnek 102 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ *integralini hesaplayalım.* $x - 1 = u$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\ &= \arcsin \frac{u}{2} + C \\ &= \arcsin \frac{x-1}{2} + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 103 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ *integralini hesaplayalım.* $2x + 1 = u$ *dönüşümü ile*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2+2}) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(2x + 1 + \sqrt{4x^2+4x+3}) + C \end{aligned}$$

bulunur.

2.5.2 $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integralinin hesabı

Bu tip integrallerde yapılacak ilk iş, kök içinin türevini integrantın pay kısmında oluşturmaktır. Burada önce x in katsayısının oluşturulmasına dikkat edilmelidir. Daha sonra yukarıdaki teknik kullanılarak integral hesaplanabilir.

Örnek 104 *$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$ integralini hesaplayalım.*

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}+4-4}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}\end{aligned}$$

olur. İk integral $x^2+4x+1=t$ dönüşümü ile hesaplanabilir. İkincisinde ise yukarıdaki teknik kullanılır. Ozaman

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} \\ &= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-3}} \\ &= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}) + C\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.3 $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integralinin hesabı

P_n, n. dereceden bir polinom olmak üzere bu tip integraller için özel bir hesaplama yöntemi vardır. Böyle bir integral Q_{n-1}, $n--1$. dereceden bir polinom ve λ bir sabit olmak üzere daima

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{5}$$

biçiminde yazılabilir. Q_{n-1} polinomu ile λ sabitinin bulunması durumunda integral kulaylıkla hesaplanabilir. (5) eşitliğinin her iki yanının türevi alınarak Q_{n-1} polinomu ile λ sabiti bulunabilir.

Örnek 105 *$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$ integralini hesaplayalım. Yukarıdaki düşünce ile*

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

yazılır. Türev alma işlemi ile

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} &= A\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{(Ax+B)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= \frac{A(x^2-2x+5)+(Ax+B)(x-1)+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= \frac{2Ax^2+(-3A+B)x+5A-B+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2A=2$, $-3A+B=-3$ *ve* $5A-B+\lambda=0$ *dan* $A=1$, $B=0$ *ve* $\lambda=-5$ *bulunur. Ozaman*

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx &= x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} \\
&= x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} \\
&= x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C
\end{aligned}$$

bulunur.

2.5.4 Ek Sorular

Örnek 106 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$
2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$
3. $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$
4. $\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$
5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
6. $\int \frac{x^4-2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

2.6 Bölüm Sonu Problemler

Örnek 107 *Aşağıdaki limitleri bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt}{\sin x^4}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

Örnek 108 $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \arcsin x dx$ *belirli integralini hesaplayınız. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 109 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ *belirsiz integralini hesaplayınız. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 110 $\int \cos x \sin^2 x \ln(\sin x) \, dx$ *belirsiz integralini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 111 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$
2. $\displaystyle\int\limits_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Örnek 112 $f(x) = \displaystyle\int\limits_{2x}^{3x+1} \sin\left(t^4\right) dt$ *fonksiyonunun türevini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 113 $\displaystyle\int\limits_a^b \left(2+x-x^2\right) dx$ *integralini maksimum yapan* a *ve* b *reel değerlerini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 114 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$ *belirsiz integralini hesaplayınız. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 115 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+4} dx$ *belirsiz integralini hesaplayınız. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.*

Örnek 116 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n^2}{(n+k)^3}$ *limitini hesaplayınız.*

Örnek 117 *Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen aralıklardaki ortalama değerini bulunuz.*

1. $f(x) = x^4$, $[0,2]$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1,4]$
3. $f(x) = \sin 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Örnek 118 *Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak verilen fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \int_{-1}^{x} (t^2+1)^{17} dt$
2. $f(x) = \int_{x}^{10} (t + \frac{1}{t}) dt$
3. $f(x) = \int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt$
4. $f(x) = \int_{1}^{\sin x} (t^2+2)^3 dt$

Örnek 119 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ *ifadesi doğru mudur? Bu durum Kalkülüsün Temel Teoremi ile çelişir mi? Neden? İntegrantın grafiğini çiziniz ve bu durumu yorumlayınız.*

Örnek 120 $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$ *limitini bir integralin değeri olduğu farkına vararak hesaplayınız.*

Örnek 121 *Yarıçapı* 3 *birim olan küre merkezinden* x *birim uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Dairesel dik kesitin alanının ortalama değerini bulunuz.*

Örnek 122 $\int_0^2 \|x\|\, dx$ *integralini hesaplayınız. Buradan* $f(x) = \|x\|$ *fonksiyonunun* $[0,2]$ *aralığındaki* $\overline{y}$ *ortalama değerini bulunuz.* $[0,2]$ *aralığında* $f(\overline{x}) = \overline{y}$ *eşitliğini sağlayan bir* $\overline{x}$ *noktası var mıdır?*

Örnek 123 $\int_0^2 \sqrt{x^3+1} dx$ *integraline alt ve üst sınır bulunuz.*

Örnek 124 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-1}^{0} (2x - e^x) dx$
2. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
3. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$
6. $\int_{-1}^{2} \left| x - x^2 \right| dx$

Örnek 125 $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$ *ve* $F(x) = \int_1^x f(x) dx$ *ise* $F''(2)$ *yi hesaplayınız.*

Örnek 126 $[-2,2]$ *aralığında* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ *fonksiyonunun ortalam değerini bulunuz. (Belirli integrali alan gibi yorumlayarak hesaplayınız)*

Örnek 127 $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4)$ *nedir?*

Örnek 128 f *türevlenebilen bir fonksiyon,* $f\,'\left(1/\sqrt{2}\right) = 4$ *ve* $y = \int\limits_0^{\sin x} f(t)\,dt$ *ise* $y' + y''$ *toplamının* $x = \pi/4$ *noktasındaki değerini bulunuz.*

Örnek 129 $\int \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 130 n *pozitif tamsayı olsun.*

1. $\int \cos^n x dx$ *integraline indirgeme formülü bulunuz.*
2. *indirgeme formülünü kullanarak* $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 131 $f\,'(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ *ve* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$ *ise* $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 132 $\int \frac{1}{x}\sqrt{9x^2 - 16}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 133 *Aşağıdaki integralleri belirli integral tanımını kullanarak hesaplayınız*

1. $\int_0^1 e^x dx$
2. $\int_1^2 (1 - x^3)dx$

Örnek 134 *Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.*

1. $\int \dfrac{x^4}{1+x^{10}}dx$
2. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$
3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$
5. $\int \dfrac{\sqrt[4]{x+1} + 2}{\sqrt[6]{x+1}}dx$
6. $\int xe^{x^2}dx$

7. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}dx$

8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$

9. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

10. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

11. $\int \tan^2 x dx$

12. $\int \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$

13. $\int \sqrt{1+\cos x}dx$

Örnek 135 *Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.*

1. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^3 x dx$

2. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$

3. $\int_0^2 x \|x\| \, dx$

4. $\int_0^2 x \left|1-x^2\right| dx$

5. $\int_0^1 x^2(1-x)^{10}dx$

6. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

Örnek 136 $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}dx$ *integralini iki integralin toplamı biçiminde yazarak ve integrallerden birini alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 137 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$ *integralini, değişken değişikliği yaparak ve çıkan integrali alan olarak yorumlayarak hesaplayınız.*

Örnek 138 *f sürekli ve $\int_0^4 f(x)dx = 10$ ise $\int_0^2 f(2x)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 139 *f sürekli ve $\int_0^9 f(x)dx = 4$ ise $\int_0^3 xf(x^2)dx$ integralini hesaplayınız.*

Örnek 140 *f sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\int_0^a \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a-x)}$$

integralini hesaplayınız. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3x^2-3x+1}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$$

integrallerini hesaplaynı

Örnek 141 *Aşağıdaki integralleri hespalayınız*

1. $\int_0^3 x\,\|x\|\,dx$
2. $\int_{-1}^3 \left|x^3-3x^2+2x\right| dx$
3. $\int_0^\pi \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$
4. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$
5. $\int_0^1 x^2(1-x)^8dx$
6. $\int_0^1 x^3(1-x^2)^8dx$
7. $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$
8. $\int_{-1}^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Örnek 142 $f(x)=\begin{cases} |x-2| & , \quad -2\leq x\leq 1 \\ |x| & , \quad 1<x\leq 2 \end{cases}$ *ise* $\int_{-2}^2 f(x)dx=?$

Örnek 143 $\int_{\frac{1}{2}}^{x^2} f(t)dt = x^{\frac{1}{x}}$ *ise* $f(1)=?$

Örnek 144 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4)=?$

Örnek 145 $\int_0^{f(x)} t^2dt = x\cos\pi x$ *ise* $f(4)=?$

Örnek 146 *Sürekli türeve sahip* f *fonksiyonu için* $f(0)=\frac{1}{2}$ *ve* $f(1)=e$ *olduğuna göre* $\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx=?$

Örnek 147 $\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k(e-1)}{n}\right)\right)=?$

Örnek 148 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}dt=?$

Örnek 149 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\frac{dt}{\ln t}=?$

Örnek 150 $\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)dt = 1$ *ise* $f(2) = ?$

Örnek 151 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız*

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$
3. $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$
4. $\int \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$
5. $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}dx$
6. $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}dx$
7. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sec x + \tan x)dx$

Örnek 152 *Türevi kendisinin iki katına eşit olan pozitif bir* f *fonksiyonu için* $f(0) = 1$ *olduğu biliniyor.* $f(x)$ *nedir bulunuz.*

Örnek 153 *Her noktasındaki eğimi, o noktanın apsisi ile ordinatı çarpımına eşit olan ve* $(0, 2)$ *noktasından geçen eğrinin denklemimi bulunuz.*

Örnek 154 $f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ *fonksiyonunun* $[0, 1]$ *aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Bu aralıkta* f *altındaki görüntüsü* f *nin ortalama değerine eşit olan bir nokta var mıdır? Neden?*

Örnek 155 *Aşağıdaki fonksiyonlarn* $[-3, 3]$ *aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Bu aralıkta* f *altındaki görüntüsü* f *nin ortalama değerine eşit olan bir nokta var mıdır?*

1. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad -3 \le x < 0 \\ x^2+1 & , \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad -3 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \\ x^2+1 & , \quad 0 < x \le 3 \end{cases}$

Örnek 156 n *bir doğal sayı olmak üzere* $\int_0^n \|x\|\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 157 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ *olsun. (f Elektirik mühendisliğinde önemli bir fonksiyondur ve kısaca* $\mathrm{Si}\, x$ *ile gösterilir.)* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ *ve* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ *limitlerini bulunuz.*

Örnek 158 $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x}\sqrt{1+t^4}dt$ *ile verilen eğrinin* $x = 1$ *apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Örnek 159 $\int \frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ *integralini hesaplayınız.*

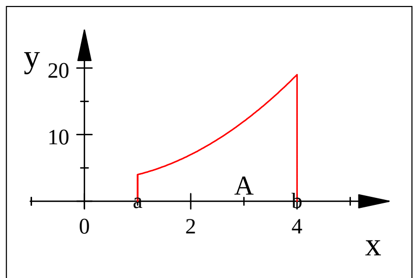
Örnek 160 $\int_{-1}^{2}\|x\|\cos^2 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

3 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

3.1 Alan Hesabı

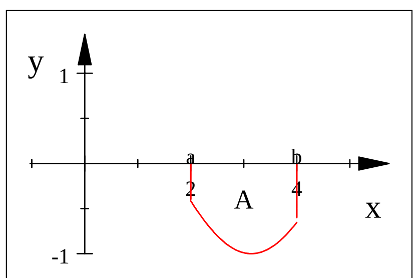
3.1.1 Eğri Altındaki Alan

Bu kesimde belirli integral yardımıyla eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanını hesaplayacağız. Belirli integral tanımından da hatırlanacağı gibi eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif ise $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali aralık üzerinde f nin grafiği altında kalan alanı vermektedir.



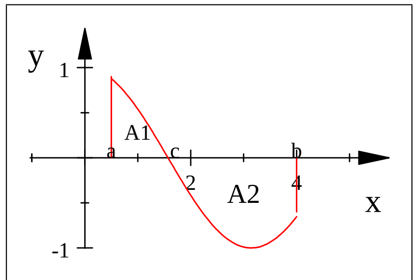
$A = \int_a^b f(x)dx$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif ise aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\int_a^b -f(x)dx$ ile hesaplanır.



$A = \int_a^b -f(x)dx$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif ve negatif değerlerden her ikisini de alıyorsa, aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan alan, f nin pozitif olduğu bölgedeki alan ile negatif olduğu bölgedeki alanın toplamı olur.



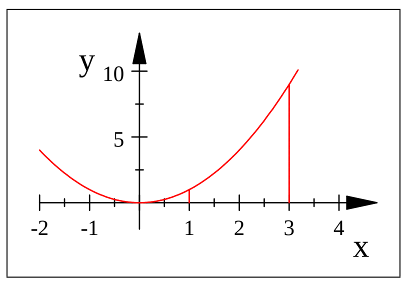
$A = A1 + A2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

Sonuç olarak $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f nin grafiği ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

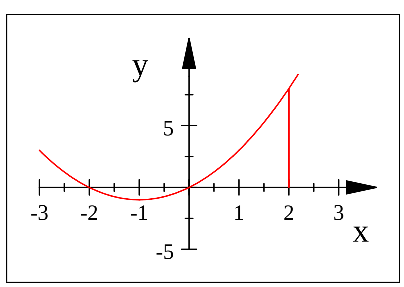
Örnek 161 *$f(x) = x^2$ eğrisi $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı*



$$A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}\ br^2$$

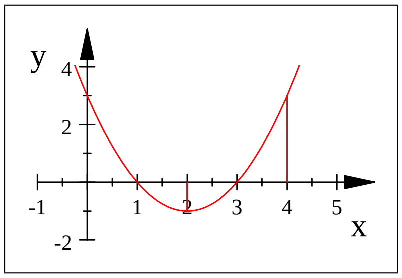
olur.

Örnek 162 $[-2, 2]$ *aralığında $f(x) = x^2 + 2x$ eğrisi ile x-ekseni tarafından sınırlanan toplam alanı bulunuz.*



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} \left|x^2+2x\right| dx \\
&= \int_{-2}^{0} -(x^2+2x)dx + \int_{0}^{2} (x^2+2x)dx \\
&= 8 \ br^2
\end{aligned}
$$

Örnek 163 *$f(x) = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$ ve $x = 4$ doğruları ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



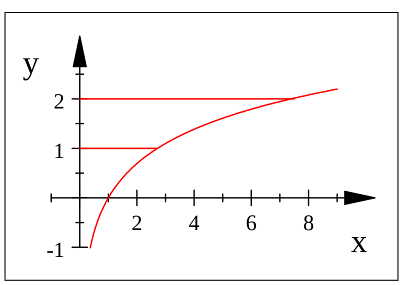
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{2}^{4} \left|x^2-4x+3\right| dx \\
&= \int_{2}^{3} -(x^2-4x+3)dx + \int_{2}^{4} (x^2-4x+3)dx \\
&= 2 \ br^2.
\end{aligned}
$$

Uyarı 164 *Benzer düşünce ile $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı*

$$A = \int_{c}^{d} |u(y)| \, dy$$

şeklinde hesaplanır.

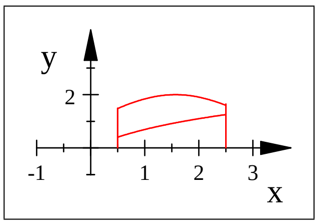
Örnek 165 *$y = \ln x$ eğrisi, $y = 1$ ve $y = 2$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

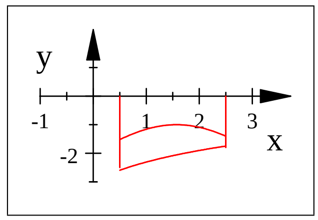


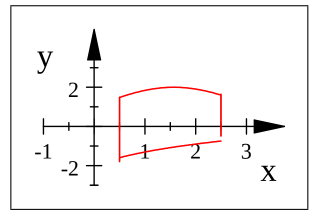
$$A = \int_{1}^{2} e^y dy = e\,(e-1) \ \ br^2.$$

3.1.2 İki Eğri Tarafından Sınırlanan Alan

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığındaki her x için $f(x) \geq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere $y = f(x), y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafıdan sınırlalan bölgenin alanı aşağıdaki şekilde hesaplanır.







$A = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad A = \int_a^b -g(x)dx - \int_a^b -f(x)dx \quad A = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b -g(x)dx$

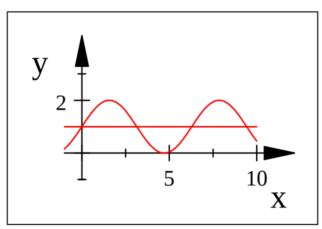
olur. Her durumda da belirtilen bölgenin alanı

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

eşitliği ile hesaplanır. Yani üstteki eğriden alttaki eğrinin çıkarılması ile

$$y_{üst} - y_{alt} = f(x) - g(x)$$

elde edilen farkın $[a, b]$ üzerindeki integrali istenen bölgenin alanını vermektedir. Ancak f ve g nin grafikleri $[a, b]$ aralığında birbirlerini kesiyorlarsa bu formül geçerli olmaz. Bu durumda f ve g nin kesişme noktaları dikkate alınarak, bu noktalar arasında $y_{üst} - y_{alt}$ farkı oluşturulmalıdır.



$$A = \int_a^{c_1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{c_1}^{c_2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{c_2}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

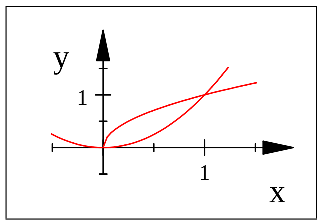
Sonuç olarak $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f ve g nin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

Uyarı 166 *İki eğri arasında kalan alan hesaplanırken, integrant ile integralin sınırlarını belirlemek kolay olmayabilir. Bunları doğru tespit etmek için bölgeyi çizmek yararlı olur. Daha sonra, bölge içinde kalacak şekilde y-eksenine paralel bir şerit çizilir. Şeridin üst ve alt ucundaki eğriler belirlenir.* $y_{üst} - y_{alt}$ *farkı integranttır (Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz). İntegralin sınırları ise, şeridin bölge ile kesiştiği en sağ ve en sol uç noktalardır.*

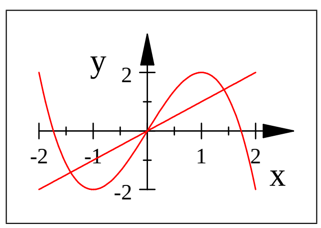
Örnek 167 $y = \sqrt{x}$ *ve* $y = x^2$ *eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. Önce bu eğrilerin kesim noktalarını bulalım.* $x^2 = \sqrt{x}$ *ise* $x = 0$ *ve* $x = 1$ *olur.*



O zaman

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y_{üst} - y_{alt})dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \\ &= \frac{1}{3}\ br^2. \end{aligned}$$

Örnek 168 $y = 3x - x^3$ *eğrisi ile* $y = x$ *doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



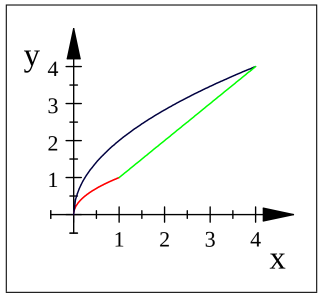
Eğrilerin kesim noktalarının apsisleri $-\sqrt{2}, 0$ *ve* $\sqrt{2}$ *dir.* $\left[-\sqrt{2}, 0\right]$ *aralığında* $y_{üst} = x$ *ve* $y_{alt} = 3x - x^3$ *dür.* $\left[0, \sqrt{2}\right]$ *aralığında ise* $y_{üst} = 3x - x^3$ *ve* $y_{alt} = x$ *dir. O zaman istenen alan*

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x - 3x + x^3)dx + \int_0^{\sqrt{2}} (3x - x^3 - x)dx \\ &= 2\ br^2. \end{aligned}$$

Örnek 169 $[-4, 2]$ *aralığında* $y = x^2 + 2x$ *ve* $y = 4 - x$ *eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 170 *$y = 2x - x^2$ ve $y = x^2$ parabolleri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 171 *$y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$ eğrilerinin üçü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*



$[0,1]$ aralığında $y_{üst} = 2\sqrt{x}$ ve $y_{alt} = \sqrt{x}$ olur. $[1,4]$ aralığında ise $y_{üst} = 2\sqrt{x}$ ve $y_{alt} = x$ olur. O zaman istenen bölgenin alanı

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)dx \\ &= \frac{5}{2}\ br^2. \end{aligned}$$

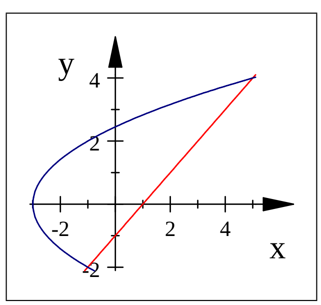
Örnek 172 *$y = \sqrt{x}, y = 6 - x$ ve $y = 1$ eğrilerinin üçü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

Uyarı 173 *İki eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulmada bazen x değişkenine göre integral almak kullanışlı olmayabilir. u ve v fonksiyonları $[c,d]$ aralığında sürekli olmak üzere, bu aralık üzerinde $x = u(y)$ ve $x = v(y)$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanı*

$$A = \int_c^d |u(y) - v(y)|\, dy$$

ile hesaplanır. İntegral hesaplanırken sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılmalıdır. Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz.

Örnek 174 *$y = x - 1$ doğrusu ile $y^2 = 2x + 6$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.*



Eğrilerin kesim noktaları $(-1,-2)$ ve $(5,4)$ noktalarıdır. O zaman istenen bölgenin alanı (y değişkenine göre integral alarak)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4}(x_{sağ} - x_{sol})dy \\ &= \int_{-2}^{4}[y+1-(\frac{1}{2}y^2-3)]dy \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Aynı bölgenin alanını x değişkenine göre integral alarak ta hesaplayabiliriz. Bu durumda $[-3,-1]$ aralığında $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = -\sqrt{2x+6}$ olur. $[-1,5]$ aralığında ise $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = x-1$ olacağından istene alan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1}[\sqrt{2x+6}-(-\sqrt{2x+6})]dx + \int_{-1}^{5}[\sqrt{2x+6}-(x-1)]dx \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Ancak burada x değişkenine göre integral alarak hesap yapmak daha zahmetlidir.

Örnek 175 *$y^2 = 1-x$ ve $2y = x+2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 176 *$x = 2y$ ve $x = 8-y^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

3.1.3 Parametrik Eğriler Tarfından Sınırlana Bölgelerin Alanı

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen eğri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_a^b |y| \, dx$$

formülünü t değişkenine bağlı yazmak gerekir. Bu durumda $dx = g'(t)dt$ olup t nin a ve b ye karşılık gelen değereleri sırası ile t_1 ve t_2 olmak üzere

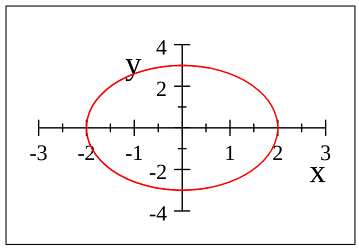
$$A = \int_a^b |y| \, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| \, g'(t)dt$$

olur.

Örnek 177

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen elipsin alanını bulunuz. Önce elipsin birinci bölgede bulunan dörtte bir alanını hesplayalım.



O zaman

$$\frac{A}{4} = \int_0^a |y|\, dx$$

olur. $x = 0$ *için* $t = \frac{\pi}{2}$ *ve* $x = a$ *için* $t = 0$ *olacağından*

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |b\sin t|\,(-a\sin t)dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \frac{ab}{2}(t - \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi ab}{4}\ br^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece $A = \pi ab\ br^2$ *bulunur.*

Uyarı 178 *Yukarıdaki örnekte elips denkelemi* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *olacağından birinci bölgede* $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ *olur. O zaman dörtte bir alan*

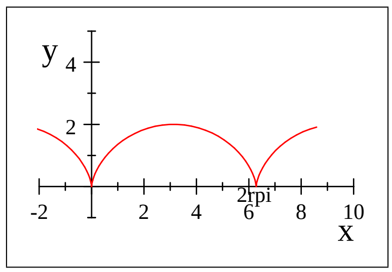
$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx \\ &= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \\ &= \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}(a\cos t)dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{\pi ab}{4}\ br^2 \end{aligned}$$

bulunur. Ancak her parametrik denklemi verilen eğri için burada belirtildiği gibi bir kartezyen denklem elde elmek kolay ve kullanışlı olmayabilir.

Örnek 179

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen sikloidin bir yayının altında kalan alanı bulunuz.



Sikloidin bir yayı $0 \leq t \leq 2\pi$ *değerleri ile bulunur. O zaman istenen alan*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi r} |y|\, dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t) r(1-\cos t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = 3\pi r^2 \ \ br^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 180

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$$

atroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3.1.4 Ek Sorular

Örnek 181 $y = x$ *ve* $y = 2x$ *doğruları ile* $y = x^2$ *parabolü arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 182 $y = x^3 - 3x$ *eğrisi ile bu eğriye* $(-1, 2)$ *noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 183 $y = x + 2$ *ve* $y = 0$ *doğruları ile* $y = 4 - x^2$ *eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 184 $y = x^2$ *eğrisi ile bu eğriye* $(2, 4)$ *noktasında teğet olan doğru ve* x*-ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

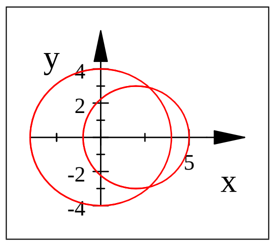
Örnek 185 $2y = x + 1$ *doğrusu ile* $x = y^2 - 1$ *eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 186 *$y = 9x - x^3$ eğrisi ile bu eğriye $(-1, -8)$ noktasında teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

Örnek 187 *$y = \dfrac{\ln x}{2}$ eğrisi ile $x = 0, y = 0$ ve $y = 1$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*

Örnek 188 *$y = \dfrac{x^2}{2}$ ve $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.*

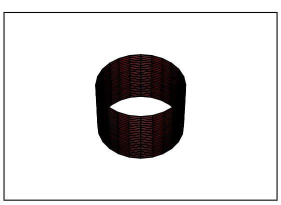
Örnek 189 *Hilal şeklindeki bölgelerin alanını bulunuz. Büyük çember $x^2+y^2 = 16$, küçük çember $(x-2)^2 + y^2 = 9$ denklemleri ile verilmektedir.*

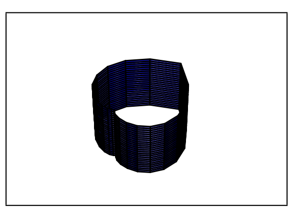


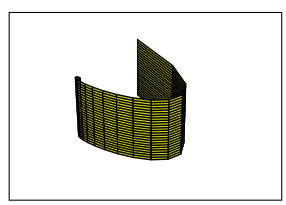
3.2 Hacim Hesabı

Bu kesimde belirli integral yardımıyla katı cisimlerin hacmini hesaplamak için kullanılan yöntemlereden üçü üzerinde duracağız. Bir cismin hacmini bulmaya çalıştığımız zaman karşılaştığımız problem, alan hesaplarken karşılaştığımız problemin aynısıdır.

İlk olarak Silindir denilen cismi düşünerek başlayalım. Genel olarak Silindir, bir düzlemsel eğrinin sınırladığı bölgenin kendisine dik bir doğru veya eksen boyunca hareket ettirilerek elde edilen bir katı cisimdir. Silindirlerin bu eksene dik olan tüm arakesitleri büyüklük ve şekil olarak aynıdır.





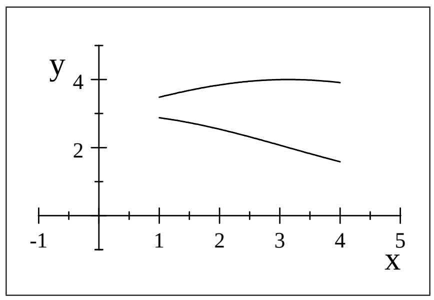


Kapalı bir eğri tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı A br^2 olsun. Bu bölge kendisine dik bir doğru boyunca h birim hareket ettirildiğinde bir silindir elde edilir. O zaman bu silindirin hacmi $V = Ah$ br^3 olarak tanımlanır. Yani böyle bir silindirin hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Özel olarak taban, yarıçapı r olan bir daire ise silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ br^3 olur. Taban, kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgen ise hacim $V = abh$ br^3 olur.

3.2.1 Kesit Yöntemi

Silindir olmayan bir S cismin hacmini bulmak için dilimleme veya kesit yöntemi denilen tekniği kullanırız. Önce S yi parçalara ayırır ve her parçanın hacmini yaklaşık olarak veren bir silindir alırız. Bütün silindirlerin hacimleri toplamı S nin hacminin yaklaşık değerini verir. Parçaların sayısının gittikçe arttığı bir limit alma işlemi ile S nin kesin hacmini buluruz.

S cismi x-ekseni boyunca uzansın ve sol ve sağ uçlarına a ve b diyelim.



S silindir olmadığından x-eksenine dik kesitlerin alanı noktadan noktaya değişebilir. $[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın genişliği $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dir. Bu noktalardan geçen ve x-ekesnine dik düzlemler seçelim. Bunlar S cismini n tane dilime ayırır. Bu dilimlere $S_1, S_2, \cdots S_n$ diyelim ve tipik bir S_k dilimini göz önüne alalım. Genelde bu dilim silindir olmayabilir. Fakat dilim ince seçilirse S_k bir silindire benzer. Sonuçta k yıncı alt aralıkta rastgele seçilen x'_k noktasındaki kesit alanı $A(x'_k)$ olmak üzere S_k diliminin hacmi $V_k \cong A(x'_k)\Delta x_k$ olur. Böylece S cisminin hacmi

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots V_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} A(x'_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

olur. Dilimlerin sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$V = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x'_k)\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

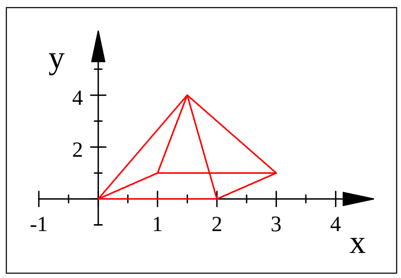
olur. Burada $A(x)$, S cisminin $[a,b]$ aralığındaki x noktasından x-eksenine dik düzlemle elde edilen kesitinin alanıdır.

Uyarı 190 *Eğer S cismi y-ekseninde c ve d noktaları arasına yerleştirilmiş ise benzer düşüncelerle hacmi*

$$V = \int_a^b A(y)dy$$

olur.

Örnek 191 *Yüksekliği h ve tabanının bir kenar uzunluğu a olan kare tabanlı dik piramidin hacmini bulunuz.*



$[0,h]$ aralığında bir y noktasından alınan kesitin de bir kare olacağı açıktır. bu karenin bir kenarı s birim ise

$$\frac{s}{a} = \frac{h-y}{h}$$

veya $s = \frac{a}{h}(h-y)$ dir. O zaman

$$A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$$

olur. Böylece piramidin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 2dy \\ &= \frac{a^2}{h^2}\left(-\frac{1}{3}(h-y)^3\right)_0^h = \frac{1}{3}a^2h \ br^3 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 192 *Tabanı, bir kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgen ve yüksekliği h olan piramidin hacmini bulunuz.*

Örnek 193 *r yarıçaplı bir kürenin hacim formülünü elde ediniz.*

3.2.2 Disk Yöntemi

Bu yöntem dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada kullanılır ve yukarıda bahsedilen kesit yöntemine dayanmaktadır. Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen katı cisme dönel cisim denir. $y = f(x)$ eğrisi $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-eksenietrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulalım. $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir noktadan alınan kesit daima bir daire olur. Kesitin alındığı noktanın apsisi x ise kesitin alanı

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

olacağından cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy$$

olur.

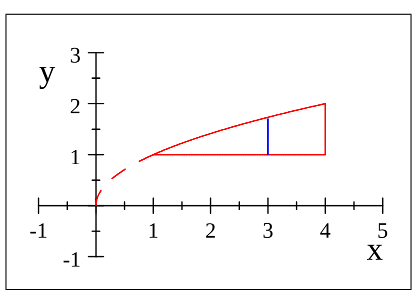
Örnek 194 *$y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 195 *$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $1 \le x \le e$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 196 *$y = \ln x$ eğrisi x-ekseni, y-ekseni ve $y = 1$ doğusu arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Uyarı 197 *Yukarıda verilen örneklerde dönel cisim x-ekseni veya y-ekseni etrafında döndürülen bir bölge ile oluşmaktadır. Bunula birlikte herhangi bir doğru etrafında döndürülen bir bilge ilede dönel cisim elde edilebilir. Bu durumda dairesel kesitin yarıçapına ve dolayısıyla alanına dikkat edilmesi gerekmektedir.*

Örnek 198 *$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$[1,4]$ aralığındaki x noktasından alınana dairesel dik kesitin yarıçapı $\sqrt{x}-1$ olacağından kesitin alanı

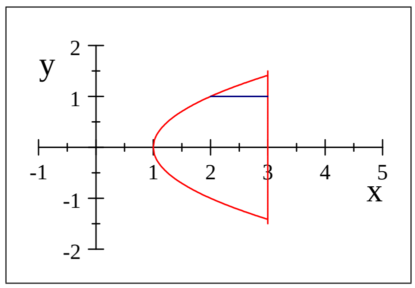
$$A(x)=\pi(yarıçap)^2=\pi\left[\sqrt{x}-1\right]^2$$

olur. O zaman dönel cismin hacmi

$$V=\int_1^4 A(x)dx=\pi\int_1^4\left[\sqrt{x}-1\right]^2dx=\frac{7}{6}\pi\ br^3$$

olur.

Örnek 199 *$x=y^2+1$ parabolü ile $x=3$ doğrusu arasında kalan bölgenin $x=3$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$x=3$ doğrusuna dik olarak alaınana dairesel kesitin yarıçapı $3-(y^2+1)=2-y^2$ olup kesitin alanı

$$A(y)=\pi(yarıçap)^2=\pi\left[2-y^2\right]^2$$

olur. O zaman cismin hacmi

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}A(y)dy=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[2-y^2\right]^2dy=\frac{64}{15}\sqrt{2}\pi\ br^3$$

bulunur.

$[a,b]$ aralığında $0\le g(x)\le f(x)$ olsun. $y=f(x)$, $y=g(x)$ eğrileri ile $x=a$ ve $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismi düşünelim. Böyle bir cisim için x-ekesnine dik kesitler halkasal bölge (pul) olur. O zaman kesitin alanı

$$\begin{aligned}A(x)&=\pi\left[f(x)\right]^2-\pi\left[g(x)\right]^2\\&=\pi\left[f^2(x)-g^2(x)\right]\end{aligned}$$

olacağından cismin hacmi

$$V=\int_a^b A(x)dx=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$

olur. (Benzer düşünce y-ekseni etrafında döndürülen bölge içinde verilebilir.)

Örnek 200 *$y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ eğrilerinin $[0, 1]$ aralığında kalan parçaları arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

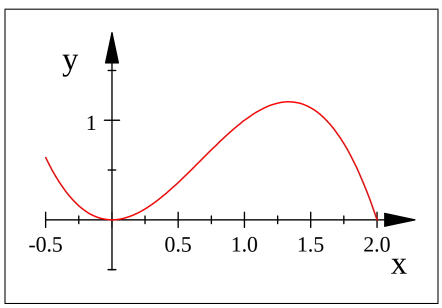
Örnek 201 *$0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0, b)$ de bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 202 *$y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = 3 - x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 203 *$y = x^2$ eğrisi ve $y = 2x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*

3.2.3 Silindirik Kabuk Yöntemi

Bazı hacim problemlerini, şimdiye kadar kullanılan kesit ve disk yöntemleri ile hesaplamak çok zordur. Örneğin, $y = 2x^2 - x^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulan katı cismi düşünelim.



Disk yöntemi ile belirtilen cismin hacmini hesaplamak için $y = 2x^2 - x^3$ eşitliğinden x i bulmak gerekir ki bu pek kolay değildir. ($y' = 4x - 3x^2 = 0$ dan $x = 0$ veya $x = \frac{4}{3}$ olur. Bu durumda $y(\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$ dir. Böylece hacim disk yöntemine göre $V = \pi \int_0^{\frac{32}{27}} (x_{sağ}^2 - x_{sol}^2) dy$ ile hesaplanmalıdır.)

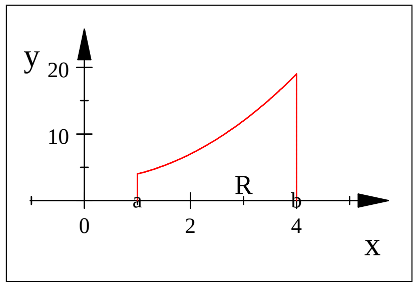
Şimdi bu tip cisimlerin hacmini hesaplamada Silindirik Kabuk Yöntemi denilen bir yöntem geliştireceğiz. Silindirik Kabuk, bir dairesel silindirden yarıçapı daha küçün olan bir başka dairesel silindirin çıkarılması ile elde edilen katı cisimdir. İç yarıçapı r_1 dış yarıçapı r_2 ve yükseklihi h olan bir silindirik kabuğun hacmi

$$\begin{aligned} V &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_2)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2}(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$

olur. Yani

$$V = 2\pi(\text{ortalama yarıçap})(\text{kalınlık})(\text{yükseklik})$$

olur. Şimdi, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki her x için $f(x) \geq 0$ olsun. Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan x-ekseni ve sol ve sağdan sırası ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölge R ve R nin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S olsun.



$[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dır. Bu noktalardan geçen ve x-ekesnine dik doğrular seçelim. Bunlar R bölgesini n tane şeride ayırır. Bu şeritlere $R_1, R_2, \cdots R_n$ diyelim ve tipik bir R_k şeridini göz önüne alalım. Bu şeridin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S_k ise S cisminin hacmi S_k ların hacimleri toplamıdır. Yani

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots V_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_k \end{aligned}$$

olur. Genel olarak S_k bir silindirik kabul olmamasına rağmen (Çünkü R_k tam olarak dikdörtgen değildir) bir silindirik kabuğu andırır ve böylece şerit ne kadar ince seçilirse S_k bir Silindirik kabuğa o kadar benzer. Sonuçta k yıncı alt aralığın orta noktası $x'_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ olmak üzere S_k nın hacmi

$$\begin{aligned} V_k &\cong 2\pi(\text{ortalama yarıçap})(\text{kalınlık})(\text{yükseklik}) \\ &= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) f(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}) \\ &= 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

olur. Böylece S cisminin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

Şeritlerin sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$V = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi x'_k f(x'_k)\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

olur. Burada ortalama yarıçapın negatif olmaması gerektiğine dikkat edelim. Eğer $x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ negatif olursa hacim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b |x| f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

ile hesaplanmalıdır. Şimdi daha önce bahsedilen cismin hacmini hesaplayalım.

Örnek 204 *$y = 2x^2 - x^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulan katı cismin hacmini bulalım.*

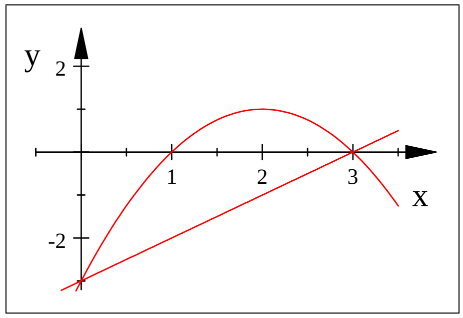
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{16}{5}\pi \ br^3. \end{aligned}$$

Uyarı 205 *f ve g fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki her x için $f(x) \geq g(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx - 2\pi \int_a^b x g(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b x \left[f(x) - g(x) \right] dx \end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 206 *$y = -x^2 + 4x - 3$ eğrisi ile $y = x - 3$ doğrusu arasında kalan bölgenin y-ekseni ettrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.*



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 x\left[-x^2+4x-3-x+3\right]dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^3+3x^2)dx \\ &= \frac{27}{2}\pi \;\; br^2 \end{aligned}$$

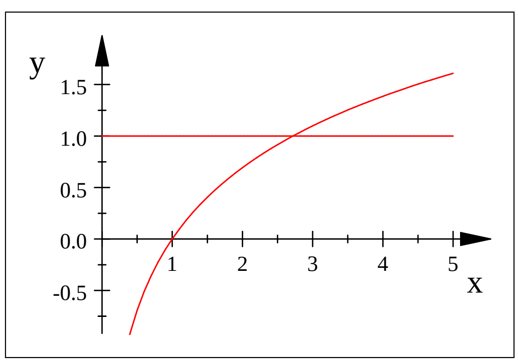
olur.

Uyarı 207 *Benzer şekilde sağdan $x = u(y)$ ve soldan $x = v(y)$ eğrileri ile $y = c$, $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi*

$$V = 2\pi \int_c^d y\left[u(y) - v(y)\right]dy$$

ile hesaplanır.

Örnek 208 *$y = \ln x$ eğrisi x-ekesni, y-ekseni ve $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor Oluşan cismin hacmini bulunuz.*



$$V = 2\pi \int_0^1 ye^y dy = 2\pi \;\; br^3$$

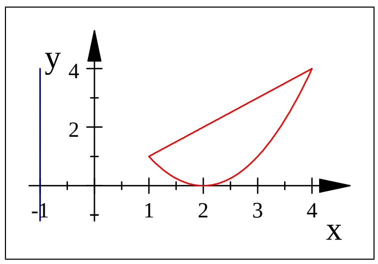
bulunur.

Uyarı 209 *$[a,b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli f fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölge $x = L$ $(L < a)$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmi*

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_a^b (Kabuk\ Yarıçapı)(Kabuk\ Yüksekliği)dx \\
& \quad 2\pi \int_a^b (x-L)f(x)dx
\end{aligned}
$$

ile hesaplanır

Örnek 210 *$f(x) = x$ ve $g(x) = (x-2)^2$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlı bölgenin $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^4 (x-(-1))(x-(x-2)^2)dx \\
&= 2\pi \int_1^4 (x+1)(-x^2+5x-4)dx \\
&= \frac{63}{2}\pi \ br^3
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 211 *$y = 4-2x$, $y = 4-x$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 212 *$xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$ ve $x = 2$ ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 213 *$xy = 5$ ve $x+y = 6$ ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 214 *$f(x) = x - x^2$ fonksiyonunu grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

3.2.4 Ek Sorular

Örnek 215 *$xy = 1$, $y = 0, x = 1$ ve $x = 3$ ile sınırlı bölgenin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 216 *$y = x$ ve $y = \sqrt{x}$ ile sınırlı bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 217 *Birinci bölgede $x = 4y$ ve $y = \sqrt[3]{x}$ ile sınırlı bölgenin $x = 8$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz. Aynı bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 218 *S cisminin tabanı, yarıçapı r olan bir dairedir. Tabana dik olan paralel kesitler, yüksekliği h olan ve farklı kenarı tabanda olan ikizkenar üçgenlerdir. S nin hacmini bulunuz.*

Örnek 219 *S cisminin tabanı yarıçapı r olan bir dairedir. Tabana dik olan paralel kesitler karedir. S nin hacmini bulunuz.*

Örnek 220 *$(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 221 *$x^2 + y^2 = 1$, $x = 1$ ve $y = 1$ ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 222 *$y = \sqrt{x}$, $y = 2$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölgenin, (a) x-ekseni, (b) y-ekseni, (c) $y = 2$ doğrusu, (d) $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 223 *$y = 2x$, $y = 0$ ve $x = 1$ ile sınırlı bölgenin, (a) $x = 1$ doğrusu, (b) $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 224 *$y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = 0$ ve $x = 1$ ile sınırlı bölgenin, (a) x-ekseni, (b) y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 225 *Yarıçapı 3 cm olan bir dairesel dik silindirden iki düzlemle bir eğri takoz kesilmiştir. Bir düzlem silindirin eksenine diktir. İkinci düzlem birinci düzlemi silindirin merkezinde 45° lik açı ile kesmektedir. Takozun hacmini bulunuz.*

3.3 Eğri Uzunluğu Hesabı

$y = f(x)$ eşitliği ile tanımlı sürekli türevlenebilen bir f fonksiyonu verilsin. Bu eğrinin a ve b apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulalım. Bu uzunluğu l ile gösterelim.

$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ve $P_k = (x_k, f(x_k))$ noktaları arasındaki uzaklık l_k ise l uzunluğu yaklaşık olarak l_k sayılarının toplamıdır. Yani

$$l \cong \sum_{k=1}^{n} l_k$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
l_k &= |P_k P_{k-1}| \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\Delta x_k
\end{aligned}$$

dır. f türevlenebilen bir fonksiyon oladuğundan ortalama değer teoremi gereği

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x'_k)$$

olacak şekilde bir $x'_k \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Böylece

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k$$

olup

$$\begin{aligned}
l &\cong \sum_{k=1}^{n} l_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k
\end{aligned}$$

bulunur. Parçalanmanın sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$l = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x'_k))^2}\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned}
l &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 226 *a yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.*

Örnek 227 $y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ *eğrisinin* $x = 2$ *ve* $x = 4$ *apsisli noktaları arasın da kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

Örnek 228 $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 4$ *eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

Uyarı 229 *Eğer eğri parçasının denklemi* $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ *biçiminde verilmiş ise, uzunluğu*

$$\begin{aligned} l &= \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy \\ &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 230 $y^2 = x$ *parabolünün* $(0,0)$ *ile* $(1,1)$ *noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.*

Uyarı 231 *Uzunluğu bulunmak istenen eğrinin parametrik denklemi*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u(t) \\ y = v(t) \end{array} \right. , t_1 \leq t \leq t_2$$

biçiminde ise

$$\begin{aligned} l_k &= |P_k P_{k-1}| \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k})^2 + (\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k})^2}\Delta t_k \end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 232

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right. , 0 \leq t \leq 2\pi$$

sikloid yayının uzunluğunu bulunuz.

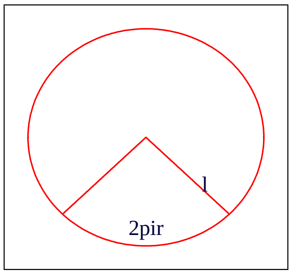
Örnek 233

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right. , 0 \leq t \leq 2\pi$$

astroid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

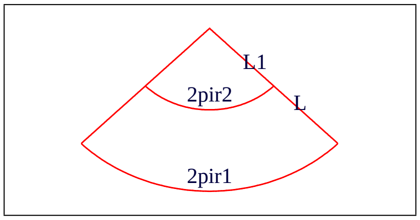
3.4 Yüzey Alanı Hesabı

Bu kesimde belirli integral yardımıyla dönel cisimlerin yüzey alanlarının hesaplanması üzerinde duracağız. Bunun için kesik konilerin yüzey alanından yararlanılacaktır. Taban yarıçapı r, ana doğru uzunluğu l olan bir koninin yanal yüzey alanı



$$S = \frac{2\pi r}{2\pi l}\pi l^2 = \pi r l \text{ br}^2$$

dir. Buna göre alt taban yarıçapı r_1, üst taban yarıçapı r_2 ve anadoğru uzunluğu L olan kesik koninin yüzey alanı



$$S = \pi r_1(L + L_1) - \pi r_2 L_1 \text{ br}^2$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{L_1 + L}{L_1} = 1 + \frac{L}{L_1}$$

den

$$L_1 = \frac{L r_2}{r_1 - r_2}$$

olup

$$\begin{aligned} S &= \pi r_1\left(L + \frac{L r_2}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \frac{L r_2}{r_1 - r_2} \\ &= \pi L \left[r_1 + \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}\right] \\ &= \pi L \left[\frac{r_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}\right] \\ &= \pi(r_1 + r_2)L \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilen pozitif bir bir fonksiyon olmak üzere $y=f(x)$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülen cisim C ve yüzey alanını S olsun. $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralığını göz önüne alalım. f nin bu aralığa karşılık gelen parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey bir kesik koniye benzerdir. Bu yüzeyin alanı S_k ise

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

olur. Diğe taraftan

$$\begin{aligned}
S_k &\cong \pi(r_1+r_2)L \\
&= \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)^2} \\
&= \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}(x_k-x_{k-1}) \\
&= \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}\Delta x_k
\end{aligned}$$

olur. f türevlenebilen bir fonksiyon oladuğundan ortalama değer teoremi gereği

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = f'(x_k')$$

olacak şekilde bir $x_k' \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Böylece

$$S_k \cong \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+[f'(x_k')]^2}\Delta x_k$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} S_k \\
&\cong \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(f'(x_k')\right)^2}\Delta x_k
\end{aligned}$$

Parçalanmanın sayısını $maks\Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$S = \lim_{maks\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)\sqrt{1+\left(f'(x_k')\right)^2}\Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O zaman

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \end{aligned}$$

bulunur. Burada f nin negatif olabileceği dikkate alınırsa yüzey alanının

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

ile hesaplanması gerektiği anlaşılmaktadır.

Örnek 234 *a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını hesaplayınız.*

Örnek 235 $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ *eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.*

Örnek 236 $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ *eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.*

Uyarı 237 *Eğer eğri parçasının denklemi $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ biçiminde verilmiş ise, bunun y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı*

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_c^d |g(y)|\sqrt{1+(g'(y))^2}dy \\ &= 2\pi \int_c^d |g(y)|\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 238 $y = x^{\frac{1}{3}}$, $0 \leq x \leq 8$ *eğri parçasının y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.*

Uyarı 239 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ *eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı ile $y = f(x) - k$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = 0$ (x-ekseni) etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı eşittir. Böylece $\frac{d}{dx}(f(x) - k) = \frac{d}{dx}f(x)$ olduğundan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanı*

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - k|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

olur.

Örnek 240 $x^2+(y-1)^2 = 1$ *çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.*

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Hatırlanacağı gibi $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinin tanımlı olması için en azından aşağıdaki iki şartın sağlanması gerekir. Birincisi $[a,b]$ integrasyon aralığı sonlu, ikincisi f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı olmalıdır. Bu tip integrallere has integral denir. Bu kesimde belirli integral kavramını, aralığın sonsuz olduğu ve f nin $[a,b]$ üzerinde sonsuz süreksizliği (dolayısıyla sınırsız) olduğu durumlara genişleteceğiz. Her iki durumda da integrale genelleştirilmiş integral (has olmayan integral) adı verilir. Bu tür integraller uygulamada sıklıkla karşımıza çıkar. Örneğin, $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ integrali aerodinamikte, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ integrali istatistikte, $\int_0^\infty Ae^{-rt}dt$ integrali faiz hesaplamalarında ve $\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ integrali ise (bu integrale bağlı tanımlanan Γ gama fonksiyonu) fiziksel uygulamalarda kullanılmaktadır.

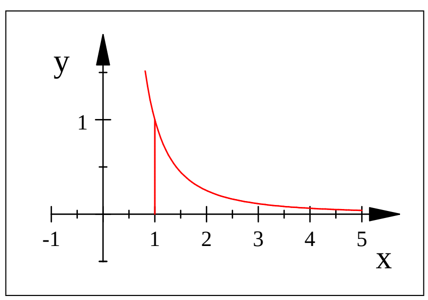
Genelleştirilmiş integraller üç guruba ayrılır. Örneğin,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^1}, \int_0^2 \frac{dx}{x-1} \text{ ve } \int_1^\infty \frac{dx}{(x-2)^2}$$

integraleri genelleştirilmiş integralleredir, ancak herbiri farklı özelliklere sahiptir. Birinci integralde integral aralığı sonsuz, ikincisinde integrant sınırlı değil, üçüncüsünde ise bu durumların her ikisi mevcuttur.

4.1 I. Tip Genelleştirilmiş İntegraller (Sonsuz Aralıklar)

$y = \frac{1}{x^2}$ eğrisinin altında, x-ekseninin üstünde ve $x = 1$ doğrusunun sağında kalan sonsuz bölgeye S diyelim.



Bölgenin uzunluğu sonsuz olduğundan alanının da sonsuz olacağı düşünülebilir. Şimdi bu alanı hesaplayalım. S bölgesinin $x = t$ $(t > 1)$ nin solunda kalan parçasının alanı

$$A(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{t}$$

dir. t ne kadar büyük seçilirse seçilsin $A(t) < 1$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 1$$

dir. Dolayısıyla S bölgesinin alanı 1 br^2 olup

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = 1$$

yazılır.

Bu örnek te olduğu gibi, pozitif olması gerekmeyen f fonksiyonunun sonsuz bir aralık üzerindeki integralini sonlu aralıklar üzerindeki integrallerinin limiti olarak tanımlarız.

Tanım 241 *Sonsuz bir aralık üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonların integraline birinci tip genelleştirilmiş integral denir.*

1. *Eğer f fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

2. *Eğer f fonksiyonu $(-\infty,b]$ aralığında sürekli ise*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

3. *Eğer f fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Herbir durumda limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

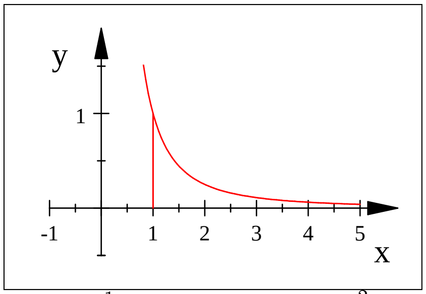
Eğer f pozitif ise bu tanımdaki genelleştirilmiş integraller alan olarak yorumlanabilir.

Örnek 242 $\int_1^\infty \frac{x^3}{x^4+1}dx$, $\int_{-\infty}^\infty x^2e^x dx$, $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ *birer I.tip genelleştirilmiş integraldirler.*

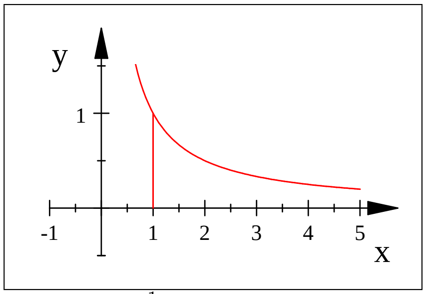
Örnek 243 $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ *integralinin yakınsak yada ıraksak olduğu belirleyiniz.*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır. Bunun anlamı $y = \frac{1}{x}$ eğrisi altında $x = 1$ doğrusunun sağında kalan bölgenin alanının sonsuz olduğudur. İlk örnekle *karşılaştırıldığında aşağıdaki durum ortaya çıkmaktadır.*

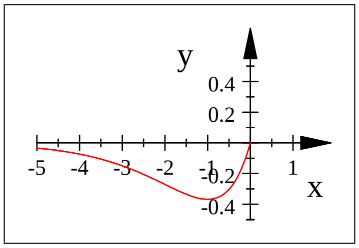


$y = \frac{1}{x^2}$ *(Alan sonlu ve 1 br^2)*



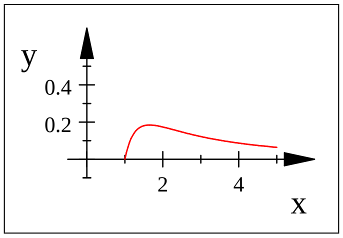
$y = \frac{1}{x}$ *(Alan sonsuz)*

Örnek 244 $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ *integralini hesaplayınız.*



Örnek 245 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ *integralini hesaplayınız.*

Örnek 246 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ *eğrisi altında* $x = 1$ *noktasının sağında kalan alan sonlu mudur? Sonlu ise değeri nedir?*



Örnek 247 $a > 0$ *olsun. Hangi* p *değerleri için* $\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ *integrali yakınsaktır?*

Örnek 248 *Hangi* a *değerleri için* $\int_{1}^{\infty} a^x dx$ *integrali yakınsaktır?*

Örnek 249 $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$ *integrali yakınsak mıdır?*

Örnek 250 *Hangi* t *değerleri için* $\int_{a}^{\infty} e^{-tx} dx$ *integrali yakınsaktır?*

Örnek 251 $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$ *ve* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ *integralleri yakınsak mıdır? Yakınsak ise değeri nedir?*

Örnek 252 $y = \frac{8}{x^2-4}$ *eğrisi altında* $x = 3$ *noktasının sağında kalan alan sonlu mudur? Sonlu ise değeri nedir?*

4.1.1 Yakınsaklık Testleri

Aşağıdaki testler integrasyon sınırlarının birinin ∞ olması halinde verilmiştir. Diğer durumlarda benzer testler verilebilir.

Teorem 253 (Karşılaştırma Testi) *$x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^\infty f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Örnek 254 *$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integrali için $0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x}$ olup*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x} = \lim_{b\to\infty} (1 - \frac{1}{e^b}) = 1$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integrali yakınsaktır.

Örnek 255 *$\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ integralinde $x \geq 2$ için $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$ olup*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 2) = \infty$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ integrali ıraksaktır.

Teorem 256 (Limit Testi) $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \gamma$ *olsun. O zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali*

- *$p > 1$ ve γ sonlu ise yakınsaktır.*
- *$p \leq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise ıraksaktır.*

Örnek 257 *$\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$$

olup $p = 2$ ve $\gamma = \frac{1}{4}$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}dx$ integrali yakınsaktır.

Örnek 258 *$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$$

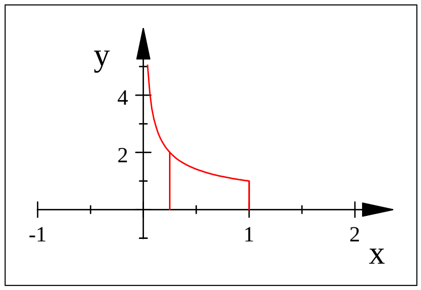
olup $p = 1$ ve $\gamma = 1$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ integrali ıraksaktır.

Örnek 259 *$x = 1$ doğrusunun sağında, $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin altında ve x-eksenin üstünde kalan bölge R olsun.*

- *R nin alanı nedir?*
- *R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi nedir?*
- *R nin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin yüzey alanı nedir?*

4.2 II. Tip Genelleştirilmiş İntegraller (Sınırlı Olmayan Fonksiyonlar)

Birinci bölgede $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi altnda $x = 0$ dan $x = 1$ e kadar olan bölgeyi düşünelim. Öncelikle a dan 1 e kadar olan kısmın alanını bulalım.



$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{a}$$

olur. Sonra $a \to 0^+$ iken bu alanın limitini hesaplayalım.

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

olur. O halde eğri altında 0 dan 1 e kadar olan alan sonludur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Bu örnek te olduğu gibi, sonlu bir aralıkta pozitif olması gerekmeyen sınırsız bir f fonksiyonunun aralık üzerindeki integralini sınırlı olduğu aralık üzerindeki integrallerinin limiti olarak tanımlarız.

Tanım 260 *Sonlu bir aralıkta bir noktada sınırsız olan fonksiyonun integraline II. tip genelleştirilmiş integral denir.*

1. *Eğer f fonksiyonu $(a, b]$ aralığında sürekli ve a da süreksizse*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

2. *Eğer f fonksiyonu $[a, b)$ aralığında sürekli ve b de süreksizse*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

3. *Eğer f fonksiyonu $a < c < b$ olmak üzere c noktası hariç $[a, b]$ aralığında sürekli ise*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Herbir durumda limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Örnek 261 $\int_0^2 \frac{e^x}{x^2}dx$, $\int_1^4 \frac{dx}{(4-x)^3}$, $\int_{-4}^5 \frac{x^2}{(x-2)(x+1)^2}dx$ *integralleri birer II. tip genelleştirilmiş integraldirler. Ancak* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$ *bir genelleştirilmiş integral değildir (Neden?).*

Örnek 262 $\int_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} [2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}] = 2\sqrt{3}$$

olduğundan verilen integral yakınsaktır ve değeride $2\sqrt{3}$ *dür.*

Örnek 263 $\int_0^3 \dfrac{dx}{x-1}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

yazılır. Burada sağdaki integrallerin her ikiside yakınsaksa verilen integral yakınsak olur. Birinin ıraksak olması halinde verilen integral ıraksaktır. O zaman

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} [\ln|t-1| - \ln 1] = -\infty$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

Uyarı 264 *Bu örnekte $x = 1$ noktasını farketmeden hareket etseydik*

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2$$

şeklinde hatalı bir hesap yapardık.

Örnek 265 $\int_0^3 \dfrac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 266 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 267 $\int_0^1 \ln x dx$ *integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.*

Örnek 268 *Hangi p değerleri için* $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ *integrali yakınsaktır.*

4.2.1 Yakınsaklık Testleri

Aşağıdaki testler f fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında sadece $x = a$ noktasında sınırsız olduğu hal için verilmiştir. Diğer durumlar için benzer sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 269 (Karşılaştırma Testi) *$a < x \leq b$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda*

- *$\int_a^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ de yakınsaktır.*
- *$\int_a^b f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x)dx$ de ıraksaktır.*

Örnek 270 *$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ integrali verilsin. $x > 1$ için $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ olup*

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 1^+} (4 - 2\sqrt{t-1}) = 4$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ integrali yakınsaktır.

Örnek 271 *$\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ integrali verilsin. $x > 3$ için $0 \leq \frac{1}{(x-3)^4} \leq \frac{\ln x}{(x-3)^4}$ olup*

$$\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4} = \lim_{t\to 3^+} \int_t^6 \frac{dx}{(x-3)^4} = \lim_{t\to 3^+} \left(-\frac{1}{3(x-3)^3} \right)\Bigg|_t^6 = \infty$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ integrali ıraksaktır.

Teorem 272 (Limit Testi) *$\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) = \gamma$ olsun. O zaman $\int_a^b f(x)dx$ integrali*

- *$p < 1$ ve γ sonlu ise yakınsaktır.*
- *$p \geq 1$ ve $\gamma \neq 0$ ise ıraksaktır.*

Örnek 273 *$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}$$

olup $p = \frac{1}{2}$ ve $\gamma = \frac{1}{2}$ olduğundan $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ integrali yakınsaktır.

Örnek 274 *$\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx$ integrali verilsin.*

$$\lim_{x\to 3^-} (3-x)f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

olup $p = 1$ ve $\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \neq 0$ olduğundan $\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}dx$ integrali ıraksaktır.

4.3 Ek Sorular

Örnek 275 *Aşağıdaki integrallerin bir genelleştirilmiş integral olup olmadığını belirleyiniz. İntegrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız. Yakınsak olanların (mümkünse) değerini bulunuz.*

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$
- $\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
- $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
- $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$
- $\int_0^\infty \frac{dx}{x-1}$

Örnek 276 *a nın hangi değeri veya değerleri için*

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

integrali yakınsaktır. Karşılık gelen integral(ler)i hesaplayınız.

Örnek 277 *Her $x > 0$ için $G(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ olsun. $xG(x) = 1$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 278 *Birinci bölgede koordinat eksenleri ve $y = -\ln x$ eğrisi arasında kalan sonsuz bölge bir cisim oluşturmak için x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 279 *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\int_2^\infty \frac{2}{v^2-v} dv$
- $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$
- $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(1+\arctan x)}$
- $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx$

- $\int_0^1 x \ln x dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}} dx$
- $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}} ds$
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$
- $\int_0^1 (-\ln x) dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt$
- $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$
- $\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cos 2x dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Örnek 280 *Aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadığını testleri kullanarak belirleyeniz.*

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \theta d\theta$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi-x}} dx$
- $\int_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} dx$
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}} d\theta$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sin x}$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t-\sin t}$ *(İpucu: $t \geq 0$ için $t \geq \sin t$)*
- $\int_{-1}^{1} \ln |x| \, dx$
- $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$
- $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
- $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

- $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$
- $\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] dx$

Örnek 281 $[-2,1]$ *aralığı üzerinde* $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ *ve* $y = 0$ *ın grafikleri ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alalım.*

- *Bölgenin sonlu alana sahip olduğunu gösteriniz.*
- *Bölgenin* x*-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin sonsuz hacme sahip olduğunu gösteriniz.*

Örnek 282 f *ve* g *nin sürekli olduğunu ve* $x \geq a$ *için* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *olduğunu kabul edelim. Eğer* $\int_a^{\infty} g(x)dx$ *yakınsak ise bu durumda* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *de yakınsaktır. Eğer* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *ıraksak ise* $\int_a^{\infty} g(x)dx$ *de ıraksaktır. Aşağıda verilen integrallerin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını göstermek için bu sonucu kullanınız.*

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+e^x}$
- $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3+4}$
- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-2x}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_1^{\infty} e^{x^2} dx$

Örnek 283 $y = e^{(x+1)^2}$, $y = e^{-(x+1)^2}$ *ve* $x = 1$ *arasında kalan bölge* $x = -1$ *doğrusu etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 284 $y = e^{x^2}$, $y = e^{-x^2}$ *ve* y*-ekseni arasında kalan bölge* y*-ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 285 $y = x^3 + x$ *ile* $y = x^3 + x^2$ *arasında kalan bölge* y*-ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.*

Örnek 286 *Aşağıdaki integrallerin karakterlerini araştırınız.*

- $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x^4+x^2+x+1}} dx$
- $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-4}\sqrt{4-x}}$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}\sqrt{\cos 2x}}$
- $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}(x+1)}dx$
- $\int_2^{5} \frac{x}{\sqrt[4]{5-x}\sqrt{x-2}(x-3)}dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt[3]{x-2}(x^6+3)}dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x^3+1)\ln(x+1)}dx$
- $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-1}(x-3)^{2/3}}$
- $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-2}}$

Örnek 287 $\int_0^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$ *integralinin ıraksak oduğunu ve dolayısıyla* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$ *integralinin de ıraksak olduğunu gösteriniz. Sonra*

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 288 *Birinci bölgede* $y = e^{-x}$ *ile* x*-ekseni arasında kalan bölgenin*

- *alanını bulunuz*
- y*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz*
- x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz*

Örnek 289 $y = \sec x$ *ve* $y = \tan x$ *arasında* $x = 0$ *dan* $x = \frac{\pi}{2}$ *ye kadar olan bölgenin*

- *alanını bulunuz*
- x*-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz*

Örnek 290 *Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan* C *sabitini bulunuz. Bu* C *sabiti için integralleri hesaplayınız.*

- $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2} \right) dx$
- $\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx$

Örnek 291 $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ *yakınsıyorsa* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *integraline mutlak yakınsaktır denir. Eğer* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *yakınsak fakat* $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ *ıraksak ise* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *integraline şartlı yakınsaktır denir.* $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ *integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 292 *$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 293 *$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 294 *$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Örnek 295 *$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali $n > 0$ için yakınsak $n \leq 0$ için ıraksaktır, göstriniz.*

Örnek 296 *$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$ eşitliğinin sağlandığını göstriniz.*

4.4 Bir Özel Genelleştirilmiş İntegral (Gama Fonksiyonu)

$\int_0^\infty e^{-ut}dt$ birinci tip genelleştirilmiş integralini göz önüne alalım. Bu integral $u > 0$ için yakınsak olup değeri $\frac{1}{u}$ dur. Yani $u > 0$ için

$$\int_0^\infty e^{-ut}dt = \frac{1}{u}$$

dur. Bu eşitliğin her iki yanının u ya göre türetilmesi ile

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty te^{-ut}dt &= \frac{1}{u^2} \\
\int_0^\infty t^2e^{-ut}dt &= \frac{2}{u^3} \\
\int_0^\infty t^3e^{-ut}dt &= \frac{3!}{u^4} \\
&\vdots \\
\int_0^\infty t^ne^{-ut}dt &= \frac{n!}{u^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade de $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

elde edilir. Burada n değeri pozitif tam sayı olarak alınmıştır. Bununla birlikte n nin herhangi bir reel sayı ($n > -1$) olması halinde de sağ taraftaki integral tanımlıdır. O halde $x > -1$ için

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt$$

yazılabilir. Buradan $0! = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ bulunur. Bu durum $0!$ in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Buradaki genelleştirilmiş integral yardımıyla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu (genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu) denir. Bu fonksiyon (şimdilik) $x > 0$ için tanımlıdır.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere $n! = n(n-1)!$ eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Buradan n bir pozitif tam sayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 0! = 1 \\
\Gamma(2) &= 1! = 1 \\
\Gamma(3) &= 2! = 2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dır. Şimdi $x > 0$ olsun. O zaman (kısmi integrasyon işlemi ile)

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-t^x e^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-b^x e^{-b} + x \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
&= x \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu özellik yardımıyla Γ fonksiyonunun herhangi iki tam sayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçlarının bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir. Örneğin,

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})$$

dir. Yani $\Gamma(\frac{1}{2})$ nin bilinmesi halinde $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \cdots$ noktalarının Γ fonksiyonu altındaki görüntüleri bulunabilir.

Örnek 297 *$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğu bilindiğine göre $\Gamma(\frac{1}{2})$ yi hesaplayınız. $t = x^2$ dnüşümü ile*

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty x^{-1} e^{-x^2} 2x dx \\
&= 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *ve* $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ *olur.*

Örnek 298 $\Gamma(\frac{5}{3}) \cong 0.9$ *ise* $\int_0^\infty x^4 e^{-x^3} dx$ *integralini yaklaşık olarak hesaplayınız.* $x^3 = t$ *denirse* $x = t^{\frac{1}{3}}$ *olup* $dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^4 e^{-x^3} dx &= \int_0^\infty t^{\frac{4}{3}} e^{-t} \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\
&= \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{\frac{2}{3}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{3}\Gamma(\frac{5}{3}) \cong 0.3
\end{aligned}$$

Örnek 299 $\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$ *integralini hesaplayınız.* $y = -\ln x$ *denirse* $x = e^{-y}$ *olup* $dx = -e^{-y}dy$ *olur. O zaman*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx &= \int_0^\infty e^{-2y} y^3 e^{-y} dy \\
&= \int_0^\infty y^3 e^{-3y} dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{t^3}{27} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{81} \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{81}\Gamma(4) = \frac{3!}{81} = \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

Örnek 300 $\left(\frac{3}{2}\right)!$ *nedir? Hesaplayınız.*

Örnek 301 *Gama fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

- $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6$
- $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \frac{45}{8}$
- $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty 3^{-4x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

5 DİZİLER VE SERİLER

5.1 Diziler

Tanım 302 *Tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir. Değer kümesi reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi adı verilir.*

Örneğin n bir pozitif tam sayı ise $f(n) = n^2 + n$ bir reel terimli dizidir. Alışılagelmiş $f(n)$ gösterimi yerine bir dizi genelikle (a_n) (veya $(a_n)_1^\infty, \{a_n\}, \{a_n\}_1^\infty$) biçiminde gösterilir. n tam sayısına a_n teriminin indisi denir. İndis yerine değerler konularak dizinin terimleri elde edilir. a_1 birinci terim, a_2 ikinci terim, ... a_n n-inci terimdir. a_n n-inci terimine dizinin genel terimi denir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) ile gösterilir. Örneğin $(\frac{n}{n+1})$ dizisi denilince terimleri $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...\frac{n}{n+1}, ...$ olan dizi anlaşılır. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) bimimde gösterilebileceği gibi terimleri listelemek ile $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ biçiminde de gösterilebilir. Bazı durumlarda dizinin ilk terimi olarak a_0 alınır ve bu durumda dizi $a_0, a_1, ...a_n, ...$ olur.

Örnek 303 $(\frac{1}{2^n})$, $((-1)^n)$, $((1 + \frac{1}{n})^n)$ *dizilerinin ilk üç terimini yazınız.*

Reel terimli diziler reel eksende noktalar olarak ifede edilebileceği gibi düzlemde noktalar olarakta ifade edilebilir.

Örnek 304 $(\frac{1}{n})$ *dizisinin terimlerini reel eksende ve düzlemde gösteriniz.*

Bazen bir dizinin indisi olan n sayısı büyüdükçe dizinin terimleri belli bir değere yaklaşır. Örneğin

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$$

dizisinde n büyüdükçe terimler 0 a yaklaşırken

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., 1 - \frac{1}{n}, ...)$$

dizisinde terimler 1 e yaklaşır. Diğer taraftan

$$(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...)$$

dizisinde n indisi büyüdükçe terimler verilen her sayıdan büyük olurken

$$(-1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...)$$

dizisinde terimler -1 ile 1 olarak değişmektedir ve tek bir değere yakınsamazlar.

Dizilerin yakınsaması ile ilgili genel kural aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 305 (a_n) *reel terimli bir dizi ve* L *bir reel sayı olsun. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısı için* $n > n_0$ *olduğunda* $|a_n - L| < \varepsilon$ *özelliğini sağlayan bir* n_0 *tam sayısı bulunabiliyorsa* (a_n) *dizisi* L *ye yakınsaktır denir.* L *sayısına da* (a_n) *dizisinin limiti denir. Bu durum*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ veya } a_n \to L$$

biçiminde gösterilir. $\lim_{n\to\infty} a_n$ *mevcut değil ise* (a_n) *dizisine ıraksaktır denir.*

Bu tanımın temelde söylediği şey şudur: L sayısının herbir komşuluğu, (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa (a_n) dizisi L sayısına yakınsıyor denir. Bilindiği gibi L sayısının ε-komşuluğu

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - L| < \varepsilon\} = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

kümesidir.

Örnek 306 *$(\frac{1}{\sqrt{n}})$ dizisinin 0 a yakınsak olduğunu gösteriniz. 0 ın $\frac{1}{50}$-komşuluğunun dışında kaç terimi vardır?*

Dizinin terimleri sıralandığında $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots$ biçiminde olduğu görülmektedir ve sezgisel olarak n indisi sınırsız arttığında terimlerin 0 limitine yaklaştığı görülür. Yakınsaklığı göstermek için $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Dizinin terimleri pozitif olduğundan $|a_n - 0| < \varepsilon$ ifadesi $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ şeklini alır ki buradan $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ olur. Böylece n_0 sayısı olarak $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ye eşit veya daha büyük olan pozitif tam sayı seçilmelidir.

Örneğin $\varepsilon = \frac{1}{50}$ verildiğinde $n_0 \geq 2500$ alınmalıdır. Bu durumda $n > n_0 \geq 2500$ olduğunda

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = \varepsilon$$

bulunur. Yani dizinin 2500 tane terimi 0 ın $\frac{1}{50}$-komşuluğunun dışındadır.

Eğer $n \to \infty$ için a_n sınırsız olarak artıyor veya azalıyor ise (a_n) dizisi ıraksaktır ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ veya } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

biçiminde gösterilir. Birincisine sonsuza ıraksama, ikincisine eksi sonsuza ıraksama denir. Bunların dışında $\lim_{n\to\infty} a_n$ limit var olmadığında da dizi ıraksaktır. Örneğin $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ ve $\lim_{n\to\infty} \sin n$ limitleri mevcut değildir.

Diziler özel fonksiyonlar olduklarından fonksiyonlar için geçerli olan limit alma kuralları diziler içinde geçerlidir. Bir dizinin limiti hesaplanırken o dizide n yerine x konup $x \to \infty$ için limit alınabilir. Buna göre $a_n = f(n)$ genel terimli dizi için

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

yazılabilir. Bu durumda L'Hopital kuralı da kullanılabilir. Bu bilgiler neticesinde aşağıdaki teoremin ispatı açıktır.

Teorem 307 *(a_n) ve (b_n) yakınsak reel sayı dizileri için $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ olsun. O zaman k bir sabit sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

- $\lim_{n\to\infty} k = k$
- $\lim_{n\to\infty} ka_n = kL_1$

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = L_1 L_2$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, $(L_2 \neq 0)$

Örnek 308 $\left((n+1)^{\frac{1}{n}}\right)$ *dizisinin limitini bulunuz.*

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$ *diyelim.* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *limiti* ∞^0 *belirsizliğine sahiptir. O zaman*

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$$

bulunur.

Örnek 309 $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ *ve* $\left((\frac{n+1}{n-1})^n\right)$ *dizilerinin limitlerini bulunuz.*

Teorem 310 $|r| < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *dır.*

Örnek 311 $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)$, (5^{-n}) *dizilerinin limitleri* 0 *dır.*

Teorem 312 (Diziler için Sıkıştırma Teoremi) $(a_n), (b_n)$ *ve* (c_n) *reel sayı dizileri olsunlar. Eğer belli bir* n_0 *sayısından büyük bütün* n *ler için*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

eşitsizliği sağlanıyor ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

dir.

Örnek 313 $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ *ve* $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *dizilerinin limitleri için sıkıştırma teoremi kullanılabilir.*

Örnek 314 $(|a_n|)$ *dizisi* 0 *a yakınsak ise* (a_n) *dizisi de* 0 *a yakınsar.*

Örnek 315 $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ *dizisinin limitini hesaplayınız.*

$n \to \infty$ *için* $2^n \to \infty$ *ve* $n! \to \infty$ *olduğundan verilen dizinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı hemen belli değildir. Üstelik* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ *limiti* $\frac{\infty}{\infty}$ *belirsizliğine* *sahip olmasına rağmen $n!$ nedeni ile L'Hopital kuralınıda kullanamayız. Ancak dizinin genel terimi üzerinde bir cebirsel işlem yaparak sıkıştırma teoremini kullanabiliriz.*

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{n!} &= \frac{\overbrace{2.2.2...2}^{n\ tane}}{1.2.3...n} = \frac{2}{1}.\frac{2}{2}.\frac{2}{3}...\frac{2}{n} \\ &\leq 2.1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}...\frac{2}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

bulunur. O zaman sıkıştırma teoreminde $a_n = 0$, $b_n = \frac{2^n}{n!}$ ve $c_n = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ bulunur.

Örnek 316 (Sıkça raslanan limitler) *Aşağıdaki altı dizi karşılarında yazılı limitlere yakınsar.*

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}} = 1$ *($r > 0$)*
- $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *($|r| < 1$)*
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{r}{n})^n = e^r$ *(her r için)*
- $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ *(her r için)*

Örnek 317 (İndirgemeli diziler) *Bir dizi, önce birinci terimi (veya terimlerinden birinin değeri) verilip, sonraki terimlerin önceki terimler cinsinden ifade edilmesi ile de tanımlanabilir. Bu tür dizilere indirgemeli veya tekrarlamalı diziler denir.*

- *(a_n) dizisi, $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 3a_n + 4$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Dizinin dördüncü terimi kaçtır.*
- *(a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n > 1$ için $a_n = na_{n-1}$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Dizinin dördüncü terimi kaçtır. $a_n = n!$ olduğuna dikkat ediniz.*
- *(a_n) dizisi, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $n > 2$ için $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ indirgeme formülü ile tanımlansın. Bu şekilde tanımlı (a_n) dizisine Fibonacci Dizisi denir ve dizinin terimlerine de Fibonacci Sayıları adı verilir.*

5.2 Monoton ve Sınırlı Diziler

Önceki kesimde $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti bulunarak (a_n) dizisinin yakınsaklığı araştırılmıştır. Ancak her zaman bu limiti hesaplamak mümkün olmayabilir. Örneğin genel terimi

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

dizinin yakınsayıp yakınsamadığı bahsi geçen limit dikkate alınarak bulunamaz. Bu kesimde (a_n) dizisinin limiti bulunmadan yakınsaklığı hakkında karar verebileceğimiz önemli bir sonucu vereceğiz.

Tanım 318 (Monoton dizi) *(a_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer her n pozitif tam sayısı için*

- $a_{n+1} > a_n$ *ise (a_n) dizisi artan,*
- $a_{n+1} < a_n$ *ise (a_n) dizisi azalan,*
- $a_{n+1} \geq a_n$ *ise (a_n) dizisi azalmayan,*
- $a_{n+1} \leq a_n$ *ise (a_n) dizisi artmayandır.*

Yukarıdaki tiplerden herhangi birini sağlayan diziye monoton dizi denir.

Uyarı 319 *Bir dizinin monotonluk durumu araştırılırken $a_{n+1} - a_n$ farkına veya $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranına bakılabileceği gibi, mümkünse $f(n) = a_n$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun türevinin işareti de incelenebilir*

Örnek 320 *Genel terimleri verilen dizilerin monoton olup olmadığını araştırınız.*

- $a_n = n$
- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $a_n = 5$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$

Tanım 321 (Sınırlı dizi) *(a_n) reel terimli bir dizi olsun.*

- *Eğer her n pozitif tam sayısı için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (a_n) dizisine üstten sınırlıdır denir.*
- *Eğer her n pozitif tam sayısı için $a_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (a_n) dizisine alttan sınırlıdır denir.*
- *Dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise diziye sınırlı dizi denir.*

Örnek 322 *Genel terimleri verilen dizilerin sınırlı olup olmadığını araştırınız.*

- $a_n = n$
- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $a_n = 5$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$
- $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

Uyarı 323 *Yakınsak her dizi sınırlıdır.* (a_n) *reel terimli dizisi* L *sayısına yakınsak olsun. O zaman* $n > n_0$ *olduğunda* $|a_n - L| < 1$ *olacak biçimde bir* n_0 *sayısı vardır. Bu durumda her* $n > n_0$ *için* $L - 1 < a_n < L + 1$ *olur. O zaman* $m = \min\{L - 1, a_1, a_2, ..., a_{n_0}\}$ *ve* $M = \max\{L + 1, a_1, a_2, ..., a_{n_0}\}$ *dersek her* n *pozitif tam sayısı için* $m \leq a_n \leq M$ *olur. Yani dizi sınırlıdır.*

Uyarı 324 *Sınırlı bir dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin* $(a_n) = ((-1)^n)$ *dizisi sınırlıdır fakat yakınsak değildir. Monoton bir dizi de yakınsak olmayabilir. Örneğin* $(a_n) = (n)$ *dizisi monotondur fakat yakınsak değildir. Sınırlı bir dizi monoton ve monoton bir dizi de sınırlı olmayabilir. (Bu uyarıdaki iki örnek bunun için kullanılabilir)*

Teorem 325 *Bir* (a_n) *dizisi hem sınırlı hem de monoton ise yakınsaktır.*

Ispat. Terimleri azalmayan diziler için ispat yapalım. (a_n) sınırlı olduğundan her n pozitif tam sayısı için $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde m ve M sayıları vardır. Bu ise disinin terimlerinin kümesi olan $S = \{a_1, a_2, ...a_n, ...\}$ kümesinin üstten sınırlı olduğunu söyler. O zaman bu kümenin L gibi bir en küçük üst sınırı vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için $L - \varepsilon < L$ olup $L - \varepsilon$ sayısı S kümesinin üst sınırı değildir. Böylece $a_{n_0} > L - \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. (a_n) azalmayan olduğundan

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \cdots \leq L < L + \varepsilon$$

olur. Buradan her $n > n_0$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ elde edilir ki bu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ demektir. ■

Örnek 326 *Genel terimi aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

- $a_n = \frac{n}{n+1}$
- $a_n = \frac{2^n}{n!}$
- $a_n = \frac{n}{e^n}$

- $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$
- $a_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ *(*$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ *ve* $0 < a_n < 1$*)*
- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ *(*$a_{n+1} - a_n > 0$ *ve* $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$*)*

Örnek 327 $a_1 = \sqrt{2}$ *ve* $n \geq 1$ *için* $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ *indirgeme bağıntısı ile tanımlı* (a_n) *dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz. (*$0 < a_n < 2$ *ve* $a_{n+1} - a_n > 0$ *dır.)*

Örnek 328 $a_1 = 1$ *ve* $n \geq 1$ *için* $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$ *indirgeme bağıntısı ile tanımlı* (a_n) *dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.*

5.3 Ek Sorular